



Méthode locale de type mortar pour le contact dans le cas de maillages incompatibles de degré élevé

Guillaume Drouet

► To cite this version:

Guillaume Drouet. Méthode locale de type mortar pour le contact dans le cas de maillages incompatibles de degré élevé. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2015. Français. NNT : 2015TOU30142 . tel-01356080

HAL Id: tel-01356080

<https://theses.hal.science/tel-01356080>

Submitted on 24 Aug 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le 25/09/2015 par :

GUILLAUME DROUET

Méthode locale de type mortar pour le contact dans le cas de maillages incompatibles de degré élevé

JURY

MICKAËL ABBAS	Docteur	EDF R&D
FAKER BEN BELGACEM	Professeur	Université de Technologie de Compiègne
DAVID DUREISSEIX	Professeur	INSA Lyon
ALEXANDRE ERN	Professeur	Ecole des Ponts, ParisTech
PATRICE HAURET	Docteur, HDR	Manufacture des Pneumatiques Michelin
PATRICK HILD	Professeur	Université Paul Sabatier
PATRICK MASSIN	Docteur, HDR	EDF R&D
YVES RENARD	Professeur	INSA Lyon

École doctorale et spécialité :

MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques appliquées

Unité de Recherche :

Institut de Mathématiques de Toulouse (UMR 5219)

Directeur de Thèse :

Patrick HILD

Rapporteurs :

Faker BEN BELGACEM et Patrice HAURET



Institut de Mathématiques de Toulouse,
Université Paul Sabatier,
118, Route de Narbonne,
31062 TOULOUSE Cedex 9.



EDF R&D
1 avenue du général de Gaulle,
92141 CLAMART Cedex 05.

Remerciements

Je tiens à remercier tout d’abord mon directeur de thèse Patrick Hild, pour ses compétences scientifiques et pédagogiques ainsi que pour ses grandes qualités humaines qui m’ont permis de m’approprier le sujet de cette thèse de manière efficace et enrichissante. Je remercie également mon encadrant industriel Mickaël Abbas. Ses compétences scientifiques, sa connaissance hors du commun de *Code_Aster* et sa grande disponibilité m’ont permis de mener à bien le volet numérique de cette thèse. Je suis sincèrement reconnaissant envers ce duo d’encadrement qui m’a clairement permis de réaliser ce travail de thèse dans les meilleures conditions imaginables, tant sur le plan scientifique que sur le plan humain.

Mes remerciements vont également à tous les membres de la “secte” du contact du département AMA et de l’IMSIA pour toutes les discussions constructives et le soutien qu’ils m’ont apportés durant ces trois années de thèse. Je remercie également toute l’équipe de développement qui m’a accueilli et intégré dans leur groupe au sein du département d’Analyse Mécanique et Acoustique d’EDF R&D. Leur aide pour la prise en main des outils de développement et de simulation numérique m’a été très précieuse.

Je remercie Faker Ben Belgacem et Patrice Hauret d’avoir accepté la charge de rapporteur durant l’été et d’avoir porté autant d’attention et d’intérêt envers mes travaux de recherche.

David Dureisseix, Alexandre Ern, Patrick Massin et Yves Renard m’ont fait l’honneur de faire parti de mon jury. Je leur en suis très reconnaissant.

Finalement, je remercie mon co-bureau et collègue doctorant pour m’avoir supporté durant nos deux années de cohabitation dans le bureau V124, je remercie chaleureusement ma famille et mes amis qui ont été des soutiens permanents tout au long de mes études et de cette aventure doctorale.

Résumé

Dans cette thèse, nous développons une méthode locale de type “mortar” pour traiter le problème de contact avec maillages incompatibles de manière optimale dans un code de calcul par éléments finis de niveau industriel. Dans la première partie de la thèse, nous introduisons le cadre mathématique de la méthode intitulée “Local Average Contact” (LAC). Cette approche consiste à imposer la condition de non-interpénétration en moyenne sur chaque élément d’un macro-maillage défini de manière idoine. Nous commençons par développer une nouvelle technique de preuve pour démontrer l’optimalité des approches de type inéquation variationnelle discrétisée par éléments finis standards pour le problème de Signorini, sans hypothèse autre que la régularité Sobolev de la solution du problème continu. Puis nous définissons la méthode LAC et démontrons, à l’aide des nouveaux outils techniques, l’optimalité de cette approche locale modélisant le contact unilatéral dans le cas général des maillages incompatibles. Pour finir, nous introduisons la formulation mixte équivalente et démontrons son optimalité et sa stabilité. Dans la seconde partie de la thèse, nous nous intéressons à l’étude numérique de la méthode LAC. Nous confirmons sa capacité à gérer numériquement le contact unilatéral avec maillages incompatibles de manière optimale à l’instar des méthodes “mortar” classiques, tout en restant facilement implémentable dans un code de calcul industriel. On montre ainsi, entre autres, que la méthode passe avec succès le patch test de Taylor. Finalement, nous montrons son apport en terme de robustesse et au niveau de la qualité des pressions de contact sur une étude de type industrielle.

Mots-clefs : Mécanique du contact, Méthode mortar, Éléments finis, Contact en moyenne locale

Abstract

In this thesis, we develop a local “mortar” kind method to deal with the problem of contact with non-matching meshes in an optimal way into a finite element code of industrial level. In the first part of the thesis, we introduce the mathematical framework of the Local Average Contact method (LAC). This approach consists in satisfying the non-interpenetration condition in average on each element of a macro-mesh defined in a suitable way. We start by developing a new technique for proving the optimality of variational inequality approaches discretized by finite elements modeling Signorini problem without other hypothesis than the Sobolev regularity of the solution of the continuous problem. Then we define the LAC method and prove, using the new technical tools, the optimality of this local approach modeling the unilateral contact in the general case of non-matching meshes. Finally, we introduce the equivalent mixed formulation and prove its optimality and stability. In the second part of the thesis, we are interested in the numerical study of the LAC method. We confirm its ability to optimally treat the contact problem when considering non-matching meshes like standard “mortar” methods, while remaining easily implementable in an industrial finite element code. We show, for example, that the method successfully passes the Taylor patch test. Finally, we show its contribution in terms of robustness and at the quality of the contact pressures on an industrial study.

Keywords: Contact mechanics, Mortar methods, Finite element, Local Average Contact

Table des matières

Introduction	9
Notations	17
I Étude théorique de la méthode Local Average Contact	19
1 Revisite du problème de Signorini	23
1.1 Introduction	23
1.2 Le problème de Signorini et sa discrétisation par éléments finis	24
1.3 Estimations clefs L^1 et L^2 sur σ_N et ∇u_N	28
1.4 Analyse d’erreur dans le cas bidimensionnel ($d = 2$)	30
1.5 Analyse d’erreur dans le cas tridimensionnel ($d = 3$)	35
1.6 Conclusion	42
2 Le problème du contact unilatéral avec maillages incompatibles	43
2.1 Introduction et configuration du problème	43
2.2 La méthode LAC dans le cas bidimensionnel ($d = 2$)	45
2.3 La méthode LAC dans le cas tridimensionnel ($d = 3$)	53
2.4 Conclusion	58
3 Étude théorique complémentaire	59
3.1 La formulation mixte de la méthode LAC	59
3.2 Recherche d’estimation d’erreur en norme L^2	63
3.3 Problématique des macro-maillages semi-intersectées en contact, “dropping edges”	66

II	Étude numérique de la méthode Local Average Contact	75
4	Étude d’impact de l’implémentation de la méthode LAC dans <i>Code_Aster</i>	85
4.1	Opérateur CREA_MALLAGE, création du maillage de calcul	86
4.2	Opérateur DEFI_CONTACT, définition des espaces fonctionnels	89
4.3	Opérateur STAT_NON_LINE, construction et résolution du système	96
4.4	Conclusion	110
5	Validation numérique “académique”	111
5.1	Analyse qualitative et quantitative comparative entre la méthode LAC et une méthode de type “collocation” :	111
5.2	Validation des taux de convergence théoriques	169
5.3	Conclusion	176
6	Évaluation numérique : vers les cas test industriels	177
6.1	Multi-Contact	177
6.2	Ironing	183
6.3	Ecrasement d’un demi anneau élastique	192
6.4	Validation d’un modèle sain d’ailette d’un rotor BP100	203
6.5	Conclusion	212
	Conclusion et perspectives	215
	Bibliographie	217

Introduction

Le problème de contact fait partie des plus grandes difficultés auxquelles on peut être confronté lors de simulations numériques non-linéaires en mécanique des structures dans les codes de calcul par éléments finis industriels. Ce problème d'apparence simple (on doit à la fois interdire l'interpénétration et respecter le principe d'action réaction à travers la surface de contact active) est en fait un problème réellement non-trivial et complexe aussi bien mathématiquement que numériquement. On est en fait confronté à une condition limite non linéaire. On doit imposer sur une partie du bord du domaine Γ , notée Γ_C , les conditions de complémentarité suivantes :

1. Un saut de déplacement à travers Γ_C ou “jeu”, noté $[u_N]$ inférieur au jeu initial, $[u_N] \leq 0$ (dans le cas d'un jeu initial nul)

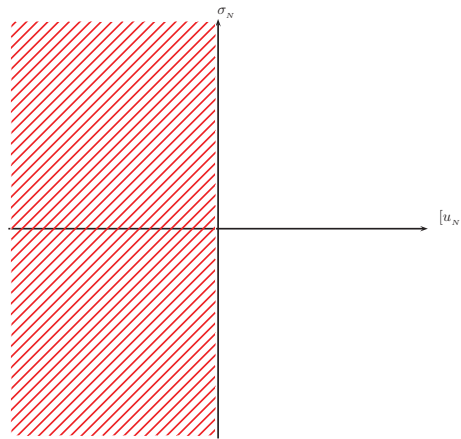


FIGURE 1 – Condition de non interpénétration, “jeu” initial nul

2. Une condition de signe (ici la négativité) sur les pressions de contact, $\sigma_N \leq 0$,

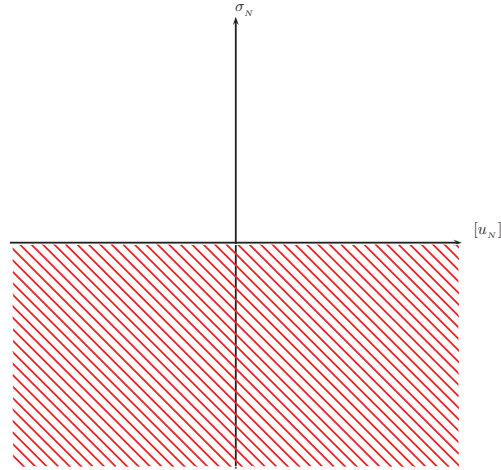


FIGURE 2 – Convention de signe sur les pressions de contact

3. Et finalement, soit le contact est établi et donc $[u_N] = 0$; soit il n'y a pas contact et alors $\sigma_N = 0$, ce qui peut se traduire par $\sigma_N [u_N] = 0$.

L'espace des solutions peut donc être décrit comme dans la Figure 3.

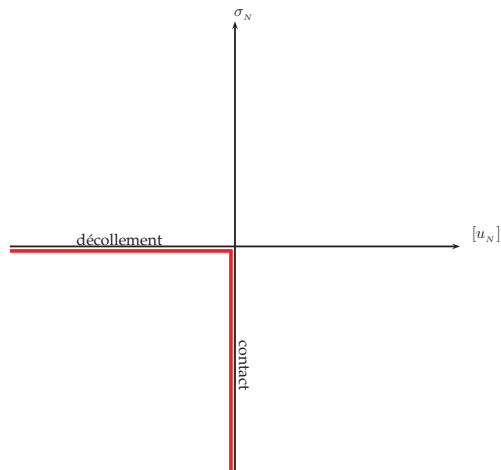


FIGURE 3 – Solution du problème de contact

La prise en compte de manière précise, robuste et performante de ce phénomène dans les outils de simulation numérique d'**EDF** représente un réel besoin pour les unités d'ingénierie du groupe. En effet, **EDF** fait aujourd'hui face à des enjeux de plus en plus pointus dans sa démarche d'assurance de la sécurité, de la fiabilité et de l'intégrité de ses différentes installations de production électrique et notamment au niveau des moyens de production nucléaire. La modélisation numérique est l'un des moyens, voire le seul dans certains cas de figure, pour répondre à cette problématique. Les ingénieurs sont donc confrontés à des modélisations toujours plus complexes, faisant intervenir un grand nombre de degrés de liberté et couplant tous types de non-linéarité, et qui doivent être étudiées avec une précision de plus en plus importante. Le problème de contact est très présent dans de

nombreuses études à fort enjeu. On peut citer par exemple, l'étude de nocivité de défauts sur les attaches des ailettes terminales des rotors BP100.

Dans cette étude, les outils de simulation numérique sont utilisés pour répondre à la problématique de maintenance des attaches des ailettes terminales des rotors BP100 (voir Figure 4 et 5).

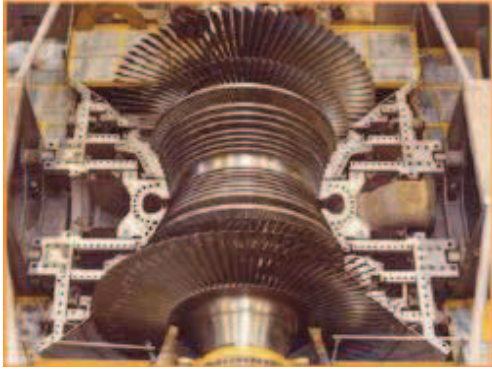


FIGURE 4 – Rotor avec ses ailettes.



FIGURE 5 – Zoom sur les attaches.

En effet, des fissures en fond de cran ont été détectées sur le parc français et à l'international. Ces défauts peuvent représenter un risque majeur pour les turbo-alternateurs (risque de départ d'ailette). Afin d'optimiser la maintenance et la disponibilité des matériels de production, l'ingénierie a fait remonter le besoin de disposer d'un outil de diagnostic rapide et fiable. Pour répondre à cette demande, la division R&D d'**EDF** a développé un modèle complet sain modélisant une ailette et son attache (voir Figures 6 et 7), validé par rapport aux données constructeurs, avec, ensuite, insertion d'un défaut de type fissure dans le modèle sain et finalement développement d'un modèle simplifié à destination de l'ingénierie. La modélisation du contact intervient fortement dans le modèle complet.



FIGURE 6 – Modèle CAO de l'attache de l'ailette.

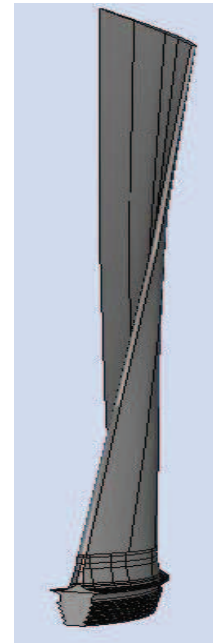


FIGURE 7 – Modèle CAO de l'ailette.

On doit alors prendre en compte précisément le contact entre l'ailette et son attache en "pied de sapin", ce qui représente 10 zones de contact de profil curviligne (correspondant aux 10 attaches), pour à la fois valider le modèle et réutiliser les pressions de contact obtenues sur ce dernier pour imposer les conditions d'effort de contact sur le modèle simplifié qui prend seulement en compte le pied de l'ailette. On perçoit, dès lors, la nécessité de disposer d'un outil de gestion du contact précis et robuste vis-à-vis de l'incompatibilité des maillages (on veut disposer de flexibilité dans la génération des maillages) et d'être capable d'utiliser des éléments finis d'ordre deux pour approcher la géométrie le plus finement possible.

Les besoins en recherche dans le domaine de la simulation numérique du contact sont donc importants pour **EDF**. Depuis une quinzaine d'années, le département d'Analyse Mécanique et Acoustique (AMA) de la R&D d'**EDF** répond à ce besoin en menant des projets de recherche dans ce domaine et capitalise les résultats dans son code de calcul par éléments finis *Code_Aster* en lien avec la plateforme de simulation en mécanique des structures Salome-Meca. D'un point de vue historique, la résolution du contact était basée sur des approches dites discrètes qui découplaient la résolution du problème mécanique et la résolution du contact. Des formulations plus précises (de type point-selle) ont été introduites à partir 2002 avec de la thèse de M. Zarroug [86]. Cette formulation de type point selle est basée sur la loi de Signorini-Coulomb discrétisée par une approche Noeud/Facette couplée à une formulation en Lagrangien stabilisé. Le problème discret obtenu est alors résolu par une triple boucle de points fixes (géométrie, frottement, contact). Cette méthodologie a été perfectionnée au cours d'une série de thèses :

- C. Zammali, 2005, voir [85], extension à la dynamique, utilisation d'un Lagrangien stabilisé complet,
- M. Torkhani, 2008, voir [78], traitement des problèmes d'usure, d'incompatibilité de conditions limites, et introduction d'un champ de signe pour le pilotage de l'intégration numérique,
- D. Kudawoo, 2012, voir [55], introduction d'une formulation de type Lagrangien augmenté et d'un algorithme de résolution full-Newton gérant toutes les non-linéarités dans la même boucle de Newton.

Les efforts ont principalement été portés sur la formulation utilisée et sur l'algorithme de résolution du problème. Tous ces travaux ont permis d'obtenir un outil de gestion du contact généralement précis, robuste et performant. Cependant, un problème de qualité et précision des résultats locaux au niveau de la surface de contact subsiste dans certains cas, notamment au niveau des pressions de contact qui peuvent présenter des oscillations importantes. Ce problème est connu pour provenir du choix de discrétisation adopté (Noeud/Facette). En effet, ce type d'approche ne peut pas gérer facilement et de manière optimale le cas général des maillages incompatibles. On entend par maillage incompatible le cas de figure où les nœuds des maillages des deux surfaces de contact sont non-coïncidents. Or ce cas de figure apparaît de manière récurrente lorsque les propriétés des objets obligent à les mailler différemment ou lors de simulations numériques faisant intervenir des grands déplacements, déformations ou rotations. Certains besoins de l'ingénierie en lien avec ce problème sont remontés ces dernières années tels qu'une meilleure qualité des pressions de contact, suppression des oscillations en pression de contact (lors de la prise en compte d'interface de contact courbe maillée avec des éléments de degrés élevés) et une plus grande robustesse des algorithmes vis-à-vis des non-linéarités géométriques affectant le contact.

Le problème de gestion optimale du problème contact dans le cas général des maillages

incompatibles est un sujet très largement abordé ces 15 dernières années dans le monde académique, parallèlement en mathématiques appliquées et en mécanique numérique. Une famille de méthodes, provenant de l'adaptation au problème de contact des méthodes "mortar" [14] pour la décomposition de domaine, a émergé et s'est imposée comme le moyen le plus pertinent pour traiter ce cas général, premiers travaux [5, 9, 10, 44, 45]. Ces méthodes consistent à utiliser une simple projection L^2 sur un espace joint, *i.e.*, espace d'éléments finis définis entre les deux objets. Les différents choix d'espaces joints engendrent toute une famille de méthodes de type "mortar". On peut citer certains choix, de manière non-exhaustive, dans le cas d'un problème tridimensionnel (les définitions sont transposables au cas bidimensionnel).

Dans le cas des éléments finis linéaires et bilinéaires (**TETRA 4** et **HEXA 8** dans le volume, **TRIA 3** et **QUAD 4** sur les surfaces de contact), on peut citer trois choix d'espace d'approximation joint principaux :

- Mortar " P^{k-1} " : l'espace d'approximation est défini comme l'espace P^0 ou Q^0 basé sur la discrétisation de la surface esclave, [40, 41] (cette formulation nécessite une stabilisation dans ce cas).
- Mortar "Standard" : on choisit l'espace d'approximation de la surface esclave, [45, 56, 66, 83].
- Mortar "Dual" : l'espace d'approximation est défini comme l'espace dual de l'espace d'approximation de la surface esclave, [49, 62].

Dans le cas des éléments finis quadratiques et bi-quadratiques (**TETRA 6**, **HEXA 20** et **HEXA 27** dans le volume, **TRIA 6**, **QUAD 8** et **QUAD 9** sur les surfaces de contact), le choix est plus compliqué (il est possible d'obtenir des valeurs "jeu" non physiques, si l'espace joint ne répond pas à certaines propriétés). On note quand même deux choix existant dans la littérature :

- Mortar " P^{k-1} " : l'espace d'approximation est défini comme l'espace P^1 ou Q^1 basé sur la discrétisation de la surface esclave, [41, 67].
- Mortar "Dual bi-quadratique" : l'espace d'approximation est défini comme l'espace dual de l'espace d'approximation de la surface esclave, [62, 64] (**HEXA 27** principalement, les autres cas demandent des stratégies de transformation des fonctions de base assez complexes).

Une fois l'espace joint choisi, il reste à définir la formulation et l'algorithme de résolution du problème de contact.

Chacune de ces méthodes possède différents avantages. Par exemple, les méthodes "Dual" et "Dual bi-quadratique" permettent une condensation facile des Lagrangiens de contact (due à une matrice de couplage égale à l'identité), les méthodes "standard" et " P^{k-1} " font intervenir des espaces d'approximation simples et définis analytiquement. Cependant, ces méthodes présentent d'importants désavantages lorsque l'on considère leur implémentation de manière générique dans un code industriel. Les deux principaux inconvénients dans notre cas sont la non-localité de la méthode (méthodes "mortar standards" [10, 44, 66, 67]) et la définition non-analytique des espaces éléments finis joints pour certains types d'éléments (méthode "mortar dual" [49, 64]). Un travail de recherche est donc nécessaire pour définir, une méthode simple, locale et efficace implémentable à moindre coût dans l'outil de simulation existant et cela tout en apportant des résultats de qualité et de précision comparables à ceux obtenus par les méthodes de type "mortar".

Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse répond à cette problématique industrielle en proposant une approche de gestion des conditions de contact en moyenne sur chaque

macro-élément d'un macro-maillage défini de manière idoine. La méthode proposée répond donc à deux impératifs, à savoir :

1. **Disposer d'un socle mathématique rigoureux.**

On souhaite démontrer mathématiquement l'optimalité en terme de taux de convergence de la méthode dans le cas général des maillages incompatibles, et vérifier la stabilité de la méthode lorsqu'elle est écrite sous une formulation mixte.

2. **Proposer une architecture compatible avec les outils de simulations numériques d'EDF.**

On désire s'insérer dans le cadre algorithmique développé précédemment et "uniquement" impacter la partie discrétisation du problème de contact tout en conservant les propriétés nécessaires à une implémentation aisée et efficace.

Pour répondre aux deux objectifs principaux, cette thèse est scindée en deux parties autoportantes. La première traitant le cadre mathématique et la seconde abordant la mise en œuvre numérique. Chaque partie est constituée de 3 chapitres.

Le Chapitre 1 aborde un nouveau schéma de preuve pour démontrer l'optimalité en terme de taux de convergence des approches de type inéquation variationnelle discrétisées par éléments finis du problème de Signorini. Cette nouvelle technique de preuve permet de s'abstenir d'utiliser des hypothèses autres que la régularité Sobolev de la solution du problème continue en 2D et 3D. Des hypothèses portant sur la zone de transition contact/non-contact sont en effet couramment utilisées dans la littérature [7, 49, 82] pour obtenir des résultats optimaux. Sans l'utilisation de ces dernières, le problème de convergence optimale restait un problème ouvert dans certains cas, voir [48]. Dans ce chapitre, on considère un problème de contact entre un objet déformable (élastique linéaire) et un socle rigide. On y traite les conditions de contact discrètes les plus connues et utilisées pour approcher le problème de contact de Signorini. Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication, [27].

Le Chapitre 2 introduit la méthode Local Average Contact (LAC), en traitant le problème du contact unilatéral sans frottement entre deux objets élastiques dans le cas général des maillages incompatibles. Cette méthode interdit l'interpénétration en moyenne entre les deux objets au niveau de la zone de contact potentielle de chaque objet considéré ; on autorise le décollement, et le glissement en moyenne sur chaque macro-élément d'un macro-maillage construit à partir d'un des maillages traces des deux objets considérés. On démontre l'optimalité de l'approche dans le cas 2D et 3D pour des éléments finis linéaires et quadratiques en utilisant les outils de démonstration introduits dans le chapitre précédent. Le prix à payer pour obtenir la stabilité et l'optimalité des taux de convergence est une hypothèse sur le maillage de la zone de contact. Cette hypothèse peut être facilement respectée en effectuant une étape de pré-traitement sur le maillage.

Le Chapitre 3 se consacre à l'étude du problème mixte associé à la discrétisation de l'inéquation variationnelle introduite dans le chapitre précédent (méthode LAC). En effet, on sera amené, pour s'inscrire dans le cadre algorithmique existant, à implémenter la méthode LAC avec cette formulation. Il convient donc de vérifier l'équivalence, la stabilité et les taux de convergence de cette formulation de la méthode LAC. Dans un second temps, on abordera le cas des estimations d'erreur en norme L^2 ainsi que l'étude de convergence sur le cas pathologique des mailles de contact en vis à vis partiel.

Le Chapitre 4 présente les clefs de l'implémentation de la méthode dans *Code_Aster*, le logiciel de calcul des structures par éléments finis de référence d'EDF. On y présente les différentes étapes de programmation nécessaires pour respecter l'hypothèse sur le maillage

de calcul, définir les espaces fonctionnels discrets en jeu et pour résoudre le problème de contact. On y détaillera les choix algorithmiques et de formulation établis ainsi que la procédure d'appariement entre les mailles des deux surfaces de contact. Bien que technique, ce chapitre permet de répondre à des réponses non-triviales sur l'implémentation de la méthode, et présente des outils plus ou moins complexes nécessaires au bon fonctionnement des méthodes de type "mortar".

Le Chapitre 5 concerne la validation numérique de la méthode LAC sur une série de cas tests dits "académiques". On procédera à une vérification qualitative, quantitative et comparative avec une méthode de type "collocation" (approche Noeud/Facette dégradée) sur des problèmes simples faisant intervenir des zones de contact planes, courbes avec transition contact/non-contact, dans le cas général des maillages incompatibles. Cependant, on se restreindra à des comportements élastiques linéaires pour les matériaux considérés, en restant dans le cadre des petites perturbations. La dernière section de ce chapitre sera consacrée à la validation des taux de convergence théoriques.

Le Chapitre 6 aborde des cas tests plus complexes et représentatifs des études des divisions d'ingénierie. On y traite le problème du multi-contact, des grands déplacements, et des grandes déformations, on finira par exhiber les résultats obtenus sur le modèle de l'ailette terminale de rotor BP100 et son attache en utilisant la méthode proposée pour modéliser le contact.

Notations

Nous allons spécifier certaines notations concernant les normes que l'on utilisera dans ce manuscrit. Soit ω un sous-ensemble de \mathbb{R}^d Lebesgue-mesurable possédant un intérieur non vide. On dénote par x un point générique de ω . On commence par définir les espaces de Lebesgue standard, notés L^p , avec $1 \leq p < \infty$. On associe à ces espaces la norme usuelle suivante :

$$\|\psi\|_{L^p(\omega)} = \left(\int_{\omega} |\psi(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Pour $p = \infty$, on définit la norme comme suit :

$$\|\psi\|_{L^\infty(\omega)} = \text{ess sup } \{|\psi(x)| : x \in \omega\}.$$

Dans la première partie de ce travail, on utilisera de manière récurrente les espaces de Sobolev standard ainsi que les espaces de Sobolev fractionnaires.

Les espaces de Sobolev standard, notés $H^m(\omega)$, avec $m \in \mathbb{N}$ sont dotés de la norme

$$\|\psi\|_{m,\omega} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \psi\|_{L^2(\omega)}^2 \right)^{1/2},$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ est un multi-indice de \mathbb{N}^d , $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ et le symbole ∂^α désigne les dérivées partielles. On adopte la convention $H^0(\omega) = L^2(\omega)$. Il sera donc possible de rencontrer deux notations différentes pour la norme $L^2(\omega)$, à savoir :

$$\|\psi\|_{L^2(\omega)} = \|\psi\|_{0,\omega}.$$

Finalement, on définit les espaces de Sobolev fractionnaires, $H^\tau(\omega)$, $\tau \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ avec $\tau = m + \nu$, m étant la partie entière de τ et $\nu \in (0, 1)$ par la norme suivante (voir [1]) :

$$\|\psi\|_{\tau,\omega} = \left(\|\psi\|_{m,\omega}^2 + \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha \psi|_{\nu,\omega}^2 \right)^{1/2},$$

où pour $\nu \in (0, 1)$ la semi norme $|\cdot|_{\nu,\omega}$ est définie comme suit :

$$|\psi|_{\nu,\omega} = \left(\int_{\omega} \int_{\omega} \frac{(\psi(x) - \psi(y))^2}{|x - y|^{d+2\nu}} dx dy \right)^{1/2}.$$

Première partie

Étude théorique de la méthode
Local Average Contact

Table des matières

1	Revisite du problème de Signorini	23
1.1	Introduction	23
1.2	Le problème de Signorini et sa discrétisation par éléments finis	24
1.2.1	Configuration du problème	24
1.2.2	Approximation du problème par éléments finis	26
1.2.2.1	Les cônes convexes des déplacements admissibles dans le cas linéaire ($k = 1$)	27
1.2.2.2	Les cônes convexes des déplacements admissibles dans le cas quadratique ($k = 2$)	27
1.2.2.3	Le problème de Signorini discret	28
1.3	Estimations clefs L^1 et L^2 sur σ_N et ∇u_N	28
1.4	Analyse d'erreur dans le cas bidimensionnel ($d = 2$)	30
1.5	Analyse d'erreur dans le cas tridimensionnel ($d = 3$)	35
1.6	Conclusion	42
2	Le problème du contact unilatéral avec maillages incompatibles	43
2.1	Introduction et configuration du problème	43
2.2	La méthode LAC dans le cas bidimensionnel ($d = 2$)	45
2.2.1	Un opérateur conservant la moyenne sur les macro-maillages	47
2.2.2	Analyse d'erreur dans le cas bidimensionnel	51
2.3	La méthode LAC dans le cas tridimensionnel ($d = 3$)	53
2.3.1	Extension de l'opérateur π_1^h au cas tridimensionnel	55
2.3.2	Analyse d'erreur dans le cas tridimensionnel	57
2.4	Conclusion	58
3	Étude théorique complémentaire	59
3.1	La formulation mixte de la méthode LAC	59
3.1.1	La formulation mixte équivalente du problème de contact unilatéral utilisant la condition contact en moyenne locale	59
3.1.2	La condition inf-sup	61
3.1.3	Estimation d'erreur H^1	63
3.2	Recherche d'estimation d'erreur en norme L^2	63
3.2.1	Le problème auxiliaire	64

3.2.2	Analyse d'erreur	65
3.3	Problématique des macro-maillages semi-intersectés en contact, “dropping edges”	66
3.3.1	Définition du cas particulier	67
3.3.2	Analyse de convergence	68

Chapitre 1

Revisite du problème de Signorini

1.1 Introduction

En mécanique des objets déformables, les éléments finis sont couramment utilisés pour modéliser le problème de Signorini (ou le problème scalaire équivalent), voir [39, 51, 56, 81, 83]. Ce modèle appelé aussi problème contact unilatéral est non-linéaire étant donné que le champ de déplacements (noté u) satisfait une condition limite non-linéaire. À savoir, on impose qu'une composante de la solution u est négative sur une partie du bord du domaine noté Γ_C (voir [71]). La formulation faible correspondante est une inéquation variationnelle admettant une unique solution, voir [31]. L'approximation par éléments finis u^h est généralement la solution de la version discrète de l'inéquation variationnelle ou d'un problème mixte (multiplicateur de Lagrange) équivalent. La régularité de la solution u à ce type de problème présente des singularités quelle que soit la régularité des données (voir [60]), et généralement la solution ne peut pas être plus régulière que $H^{5/2}$. Cette limitation implique que seuls les éléments finis d'ordre 1 ou 2 peuvent être réellement utiles pour approcher ce problème. Les résultats de convergence optimaux en norme $H^1(\Omega)$ établis jusqu'à présent nécessitent généralement l'emploi d'hypothèses techniques supplémentaires sur la zone de contact (sinon, on peut uniquement obtenir des résultats sous optimaux [48]). Nous allons décrire les hypothèses couramment utilisées :

- **Cas linéaire bidimensionnel :**

L'analyse d'erreur dans [8] suppose que la solution exacte u admet un nombre fini de points de transition contact/non-contact (on obtient l'optimalité quand u appartient à $(H^\tau(\Omega))^2$, $3/2 < \tau < 2$). Sous le même type d'hypothèses, l'analyse dans [49] obtient l'optimalité pour le cas $\tau = 2$ (un terme logarithmique légèrement sous-optimal était présent dans [8] et légèrement amélioré dans [11]),

- **Cas quadratique bidimensionnel :**

L'analyse d'erreur dans [7] n'utilise pas d'hypothèses supplémentaires pour $2 < \tau \leq 5/2$. Cependant, dans le cas $3/2 < \tau \leq 2$ une hypothèse similaire au cas linéaire bidimensionnel est nécessaire,

- **Cas linéaire tridimensionnel :**

L'analyse d'erreur dans [49] (pour u appartenant à $(H^\tau(\Omega))^3$, $3/2 < \tau \leq 2$) se base sur les nœuds dans la zone de non-contact possédant une partie du support de leur fonction de base dans la zone de contact effective. Pour résumer, on suppose qu'il existe pour ces nœuds un rectangle en contact d'aire αh^2 dans un voisinage de rayon

βh (avec α, β fixés),

- **Cas quadratique tridimensionnel :**

L'analyse d'erreur dans [82] quand $2 < \tau < 5/2$ utilise une estimation ("Assumption 4" p. 739) de la norme L^2 du déplacement normal sur un tube de section h centré sur la frontière où la transition contact/non-contact a lieu.

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'analyse d'erreur dans le cadre de la formulation par inéquation variationnelle dans le cas des éléments finis linéaires et quadratiques en 2D et 3D. Le résultat principal, énoncé dans les Théorèmes 1.1, 1.2, 1.3 et 1.4 (voir (1.13), (1.14), (1.32), (1.33)) utilise uniquement la régularité Sobolev de la solution du problème continu. On met en œuvre une nouvelle technique de preuve permettant de lever les hypothèses additionnelles couramment utilisées dans tous les cas de figures considérés, grâce à deux lemmes clefs présentés dans la section 1.3. On peut résumer les résultats de convergence de la manière suivante.

Soit $d = 2, 3$ la dimension du problème considéré, $k = 1, 2$ le degré de l'approximation par éléments finis et h le diamètre caractéristique du maillage. Soient u et u^h les solutions du problème continu et discret respectivement. On suppose que $u \in (H^\tau(\Omega))^d$ avec $3/2 < \tau \leq 3/2 + k/2$. Alors

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq Ch^{\tau-1} \|u\|_{\tau,\Omega}.$$

Remarque 1.1. Dans ce chapitre et dans la suite de l'analyse théorique de cette thèse on s'intéressera uniquement à des régularités $3/2 < \tau \leq 5/2$. L'analyse pour des régularités plus faibles $1 < \tau \leq 3/2$ fait intervenir d'autres méthodes de preuve introduites dans [8] et donne déjà des résultats optimaux sans hypothèses techniques supplémentaires sur la zone de contact.

Pour des raisons de simplicité des démonstrations, et afin de ne pas avoir à considérer la non-conformité provenant de l'approximation du domaine, on considère dans ce chapitre des domaines polygonaux notés $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$. Le bord $\partial\Omega$ est donc composé d'un nombre fini de segments (ou polygones) Γ_j , $0 \leq j \leq J$. Dans ce cas, l'espace $H^\tau(\Omega)$ défini précédemment ne coïncide pas uniquement avec la restriction à Ω de toutes les fonctions de $H^\tau(\mathbb{R}^d)$ (voir [35]) mais aussi avec l'espace de Sobolev défini par interpolation hilbertienne des espaces de Sobolev standard $(H^m(\Omega))_{m \in \mathbb{N}}$. On a équivalence des normes provenant des différentes définitions de $H^\tau(\Omega)$ (voir [75]). Finalement on peut introduire l'opérateur de trace $T : \psi \mapsto (\psi|_{\Gamma_j})_{1 \leq j \leq J}$, envoyant de manière continue $H^\tau(\Omega)$ sur $\prod_{j=1}^J H^{\tau-1/2}(\Gamma_j)$ pour $\tau > 1/2$ (voir, [59]).

1.2 Le problème de Signorini et sa discrétisation par éléments finis

1.2.1 Configuration du problème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec $d = 2, 3$, un domaine polygonal représentant la configuration de référence d'un corps linéairement élastique dont le bord est composé de trois parties ouvertes disjointes Γ_N , Γ_D et Γ_C telles que $\overline{\Gamma_N} \cup \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_C} = \partial\Omega$. On suppose que Γ_C et Γ_D sont de mesures non nulles dans \mathbb{R}^{d-1} et, dans un souci de simplicité, que Γ_C est un segment quand $d = 2$ ou un polygone quand $d = 3$. Le corps élastique est soumis à une condition

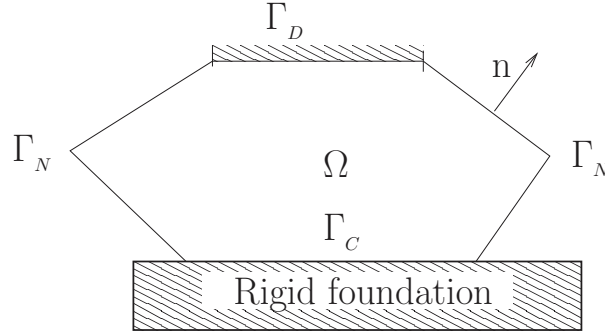


FIGURE 1.1 – Corps élastique Ω en contact avec un socle rigide sur Γ_C .

limite de Neumann sur Γ_N de densité $F \in (L^2(\Gamma_N))^d$, à une condition limite de Dirichlet sur Γ_D (pour simplifier, on suppose que le corps est encastré), et à une force interne dans Ω (surfactive ou volumique) notée $f \in (L^2(\Omega))^d$. Pour finir, on ajoute une condition de contact sans frottement entre le corps élastique et une base rigide sur Γ_C (voir Figure 1.1). Le problème consiste à trouver le champ de déplacement $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifiant (1.1)–(1.5) :

$$-\operatorname{div} \sigma(u) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.1)$$

$$\sigma(u)n = F \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad (1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D, \quad (1.3)$$

où $\sigma(u) = \mathcal{A}\varepsilon(u)$ représente le tenseur des contraintes, $\varepsilon(u) = (\nabla u + (\nabla u)^T)/2$ est le tenseur linéarisé des déformations, n désigne la normale unitaire sortante à Ω sur $\partial\Omega$, et \mathcal{A} est le tenseur d'ordre 4 possédant les propriétés usuelles de symétrie et d'ellipticité et dont les composantes sont dans $L^\infty(\Omega)$.

Sur Γ_C , on décompose les champs vectoriels de déplacement et de contrainte selon les composantes normale et tangentielle :

$$u_N = u \cdot n, \quad u_T = u - u_N n,$$

$$\sigma_N = (\sigma(u)n) \cdot n, \quad \sigma_T = \sigma(u)n - \sigma_N n.$$

La condition de contact unilatéral sur Γ_C est exprimée par les conditions de complémentarité suivantes :

$$u_N \leq 0, \quad \sigma_N \leq 0, \quad u_N \sigma_N = 0. \quad (1.4)$$

Dans cette configuration, on a choisi un jeu nul sur la configuration de référence du problème. L'absence de frottement sur Γ_C se traduit par :

$$\sigma_T = 0. \quad (1.5)$$

Remarque 1.2. Le problème de contact (1.1)–(1.5) est la version vectorielle du problème de Signorini scalaire qui consiste à trouver le champ $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$-\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega, \quad u \leq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \leq 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Tous les résultats démontrés dans ce chapitre, en particulier les taux de convergence des Théorèmes 1.1 à 1.4, peuvent être étendus de manière immédiate au problème de Signorini scalaire.

Remarque 1.3. Le problème de contact unilatéral présente différents types de limitations de régularité causées en particulier par la régularité des données, la transition de conditions aux limites (*i.e.*, Neumann-Dirichlet), les coins des domaines polygonaux, et la condition de contact de Signorini qui génère des singularités au niveau des zones de transition contact/non-contact. Les trois premiers types de non-régularité ne dépendent pas des conditions de Signorini (voir, [35, 68]). Dans la littérature traitant les singularités du problème de Signorini, les auteurs étudient généralement les singularités provenant des conditions de contact : le travail dans [60] restreint au cas 2D et considérant l'opérateur de Laplace sur un domaine polygonal permet de montrer que la solution du problème de Signorini est de régularité $H^{5/2-\varepsilon}$ au voisinage de Γ_C . Si Γ_C n'est pas un segment, mais une union de segments, alors des singularités supplémentaires apparaissent (voir sous-section 2.3 dans [4] pour le cas 2D). Dans le cas 3D, les références [3, 2] démontrent un résultat de régularité locale $C^{1,1/2}$ avec les opérateurs de Laplace et Lamé dans le cas particulier d'une demi boule en contact avec une surface plane Γ_C et la référence [36] s'intéresse au cas d'une zone de contact non plane et avec un obstacle à distance non-nulle. Dans la suite de cette analyse théorique on supposera donc disposer d'une régularité maximum pour u de $\tau = 5/2$ pour les cas bidimensionnel et tridimensionnel.

Nous introduisons l'espace de Hilbert suivant :

$$V = \left\{ v \in (H^1(\Omega))^d : v = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\}.$$

L'ensemble des déplacements admissibles satisfaisant la condition de non interpénétration sur la zone de contact Γ_C est alors :

$$K = \{ v \in V : v_N = v \cdot n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C \}.$$

Soient $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot)$ les formes bilinéaire et linéaire définies pour tout u et v dans V :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mathcal{A} \varepsilon(u) : \varepsilon(v) d\Omega, \quad l(v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_N} F \cdot v d\Gamma,$$

et qui représentent le travail virtuel des forces élastiques et celui des forces externes. Grâce aux hypothèses de régularité sur \mathcal{A} , f et F , il vient que $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique, V -elliptique et continue sur $V \times V$ et que $l(\cdot)$ est une forme linéaire et continue sur V .

La formulation faible du Problème (1.1)–(1.5) (du point de vue inéquation variationnelle), introduite dans [31] (voir aussi, [39, 51]) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ vérifiant :} \\ a(u, v - u) \geq l(v - u), \quad \forall v \in K. \end{cases} \quad (1.6)$$

Le Problème (1.6) admet une unique solution conformément au théorème de Stampacchia.

1.2.2 Approximation du problème par éléments finis

Soit $V_k^h \subset V$ une famille d'espaces de dimension finie indexés par h associée à une famille régulière T^h de triangulations ou tétraédrisations du domaine Ω (voir [15, 20, 28]). La notation h représente le plus grand diamètre parmi les éléments fermés $T \in T^h$. On choisit l'approximation continue par polynôme de degré k avec $k = 1, 2$, par morceaux, *i.e.* :

$$V_k^h = \left\{ v^h \in (C(\overline{\Omega}))^d : v^h|_T \in (P^k(T))^d, \forall T \in T^h, v^h = 0 \text{ on } \Gamma_D \right\},$$

où $P^k(T)$ représente l'espace des polynômes de degré $\leq k$. Dans le cas 3D ($d = 3$), on utilisera des inégalités inverses sur Γ_C et nous supposons donc que la trace du maillage T^h sur Γ_C est quasiuniforme de diamètre caractéristique $h_C \leq h$. On va maintenant rappeler quelques conditions de non-interpénétration classiques pour les éléments finis linéaires et quadratiques dans le cas 2D et 3D.

1.2.2.1 Les cônes convexes des déplacements admissibles dans le cas linéaire ($k = 1$)

La plus simple des conditions de contact discrètes est la suivante :

$$K_1^h = \left\{ v^h \in V_1^h : v_N^h \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C \right\},$$

cette condition impose la non-interpénétration de manière ponctuelle au niveau des nœuds du maillage. Nous allons aussi considérer une condition de non-interpénétration en moyenne sur chaque élément de contact $T \cap \Gamma_C$ (un segment quand $d = 2$ ou un triangle quand $d = 3$) :

$$\overline{K_1^h} = \left\{ v^h \in V_1^h, \int_{T \cap \Gamma_C} v_N^h d\Gamma \leq 0, \forall T \in T^h \right\}.$$

On remarque de suite que $K_1^h \subset K$, $\overline{K_1^h} \not\subset K$ et $K_1^h \subset \overline{K_1^h}$. On est donc en présence de méthodes conformes et non-conformes, on devra donc traiter lors de l'analyse d'erreur un terme d'erreur d'approximation et un terme d'erreur de consistance supplémentaire pour les méthodes non-conformes, correspondante au "crime variationnel".

1.2.2.2 Les cônes convexes des déplacements admissibles dans le cas quadratique ($k = 2$)

Dans la suite de ce chapitre, on note x_i , $0 \leq i \leq I$ les sommets de la triangulation ou tétradratisation situés dans $\overline{\Gamma_C}$ et m_j , $0 \leq j \leq J$ les nœuds milieux des éléments de contact lorsque $d = 2$ (*i.e.*, les nœuds milieux des segments de $\overline{\Gamma_C}$). Lorsque $d = 3$ les points m_j , ($0 \leq j \leq J$), sont les nœuds milieux des côtés des éléments de contact (*i.e.*, les nœuds milieux des côtés des triangles de $\overline{\Gamma_C}$).

Le premier cône des déplacements admissibles vérifie la condition de non-interpénétration à la fois aux sommets et aux nœuds milieux :

$$K_2^h = \left\{ v^h \in V_2^h, v_N^h(x_i) \leq 0, \forall 0 \leq i \leq I, v_N^h(m_j) \leq 0, \forall 0 \leq j \leq J \right\},$$

le second impose la condition de non-interpénétration en moyenne sur chaque élément de contact (segment en 2D ou triangle en 3D) :

$$\overline{K_2^h} = \left\{ v^h \in V_2^h, \int_{T \cap \Gamma_C} v_N^h d\Gamma \leq 0, \forall T \in T^h \right\},$$

et le dernier est une combinaison des deux cas précédents (spécifique au cas quadratique) :

$$\widehat{K_2^h} = \left\{ v^h \in V_2^h, \int_{T \cap \Gamma_C} v_N^h d\Gamma \leq 0, \forall T \in T^h, v_N^h(x_i) \leq 0, \forall 0 \leq i \leq I \right\}.$$

On remarque qu'aucun de ces cônes convexes n'est inclus dans K . On est donc en présence de méthodes non-conformes. De plus la propriété d'inclusion suivante $K_2^h \subset \widehat{K_2^h} \subset \overline{K_2^h}$ est vérifiée. Dans le cas $d = 3$, on va considérer une quatrième condition de contact :

$$\widehat{K_2^h} = \left\{ v^h \in V_2^h, v_N^h(m_j) \leq 0, \forall 0 \leq j \leq J \right\},$$

qui vérifie $K_2^h \subset \widehat{K_2^h} \subset \overline{K_2^h}$ (la définition similaire pour $d = 2$ ne mène pas à des résultats de convergence intéressants).

Remarque 1.4. Etant donné que l'on considère uniquement dans ce chapitre des tétra-drisations du domaine Ω (dans le cas 3D), les inclusions précédentes $K_2^h \subset \widehat{K_2^h}$ et $\widehat{K_2^h} \subset \overline{K_2^h}$ peuvent être démontrées en utilisant un schéma d'intégration d'ordre 2 (voir, [20, 28]) : $\forall v^h \in V_2^h$

$$\int_{T \cap \Gamma_C} v_N^h d\Gamma = \frac{|T \cap \Gamma_C|}{3} \sum_{j=1}^3 v_N^h(m_j),$$

où $|T \cap \Gamma_C|$ représente la surface $T \cap \Gamma_C$ et m_1, m_2, m_3 désignent les trois nœuds milieux des côtés du triangle considéré. Une conséquence de ce schéma d'intégration est que l'intégrale des fonctions de base associées aux nœuds sommets sur $T \cap \Gamma_C$ est nulle.

1.2.2.3 Le problème de Signorini discret

Soit K^h un des onze cônes convexes de déplacements admissibles (cinq pour le cas $d = 2$ et six pour $d = 3$), alors la version discrète de l'inégalité variationnelle (1.6) est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^h \in K^h \text{ vérifiant :} \\ a(u^h, v^h - u^h) \geq l(v^h - u^h), \quad \forall v^h \in K^h. \end{cases} \quad (1.7)$$

D'après le théorème de Stampacchia, le problème (1.7) admet une unique solution.

1.3 Estimations clefs L^1 et L^2 sur σ_N et ∇u_N

Les quatre estimations suivantes représentent le point clef de la nouvelle analyse d'erreur optimale proposée dans ce chapitre. L'avantage de ces estimations réside dans le fait qu'elles ne font pas intervenir d'autres hypothèses que la régularité Sobolev de u . C'est donc leur utilisation astucieuse dans les preuves des sections suivantes qui nous permettra de relâcher les hypothèses nécessaires jusqu'à présent pour obtenir les taux de convergence optimaux pour les différents problèmes discrets approchant le problème de Signorini.

Lemme 1.1. *Soit $d = 2$ ou $d = 3$, et $3/2 < \tau < 5/2$. Soit h_e le diamètre des éléments traces $T \cap \Gamma_C$ de dimension $d - 1$ et $|Z_C|, |Z_{NC}|$ les mesures dans \mathbb{R}^{d-1} des zones effectives de contact et non-contact Z_C, Z_{NC} dans $T \cap \Gamma_C$. Supposons que $|Z_C| > 0$ et $|Z_{NC}| > 0$.*

Les estimations L^1 et L^2 suivante sont vérifiées pour σ_N et ∇u_N :

$$\|\sigma_N\|_{L^1(T \cap \Gamma_C)} \leq \frac{|Z_C|^{1/2}}{|Z_{NC}|^{1/2}} h_e^{\tau-2+d/2} |\sigma_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}, \quad (1.8)$$

$$\|\sigma_N\|_{0, T \cap \Gamma_C} \leq \frac{1}{|Z_{NC}|^{1/2}} h_e^{\tau-2+d/2} |\sigma_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}, \quad (1.9)$$

$$\|\nabla u_N\|_{L^1(T \cap \Gamma_C)} \leq \frac{|Z_{NC}|^{1/2}}{|Z_C|^{1/2}} h_e^{\tau-2+d/2} |\nabla u_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}, \quad (1.10)$$

$$\|\nabla u_N\|_{0, T \cap \Gamma_C} \leq \frac{1}{|Z_C|^{1/2}} h_e^{\tau-2+d/2} |\nabla u_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}. \quad (1.11)$$

Remarque 1.5. Par souci de simplicité, on considère que ∇u_N est une fonction de \mathbb{R}^{d-1} dans \mathbb{R}^{d-1} en supposant que Γ_C est inclus dans l'axe \vec{Ox} pour le cas bidimensionnel ou dans le plan \vec{OxOy} pour le cas tridimensionnel.

Démonstration. Nous commençons la preuve avec l'estimation (1.9). Étant donné que u est solution de (1.6), la condition de contact unilatéral (1.4) est vérifiée au sens faible ; on en déduit que $\sigma_N = 0$ p.p. sur Z_{NC} . On obtient donc

$$\begin{aligned} \|\sigma_N\|_{0, T \cap \Gamma_C}^2 &= \int_{Z_C} \sigma_N(s)^2 ds \\ &= |Z_{NC}|^{-1} \int_{Z_C} \int_{Z_{NC}} (\sigma_N(s) - \sigma_N(t))^2 dt ds \\ &= |Z_{NC}|^{-1} \int_{Z_C} \int_{Z_{NC}} \frac{(\sigma_N(s) - \sigma_N(t))^2}{|s - t|^{d-1+2\nu}} |s - t|^{d-1+2\nu} dt ds \\ &\leq |Z_{NC}|^{-1} \sup_{Z_C \times Z_{NC}} (|s - t|^{d-1+2\nu}) \int_{Z_C} \int_{Z_{NC}} \frac{(\sigma_N(s) - \sigma_N(t))^2}{|s - t|^{d-1+2\nu}} dt ds \\ &\leq |Z_{NC}|^{-1} h_e^{d-1+2\nu} |\sigma_N|_{\nu, T \cap \Gamma_C}^2 \\ &= |Z_{NC}|^{-1} h_e^{2(\tau-2+d/2)} |\sigma_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 \end{aligned}$$

ce qui démontre (1.9). En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on montre (1.8).

Les deux estimations suivantes (1.10) et (1.11) portent sur ∇u_N (i.e., u'_N si $d = 2$). En premier lieu, nous devons utiliser un résultat non trivial (voir [58]) qui affirme que si v appartient à $H^1(\omega)$, alors $\nabla v = 0$ p.p. sur toute “ligne de niveau” (pour toute dimension d). Quand v est continue, ce qui est le cas pour $v = u_N$ sur $\omega = \Gamma_C$, alors la notion de ligne de niveau peut être interprétée au sens classique (autrement une définition appropriée devrait être utilisée). Étant donné que Z_C correspond à la ligne de niveau 0, on a donc $\nabla u_N = 0$ p.p. sur Z_C . Les estimations (1.10) and (1.11) peuvent alors être démontrées de la même manière que (1.8) and (1.9) en changeant σ_N par u'_N (resp. les deux dérivées partielles de u_N si $d = 3$) et en inversant les rôles de Z_C et Z_{NC} . \square

Les quatre estimations suivantes sont les extensions au cas $\tau = 5/2$, $d = 3$ des estimations clefs précédentes.

Lemme 1.2. On pose $d = 3$ et $\tau = 5/2$. Soit h_e le diamètre du triangle $T \cap \Gamma_C$ et $|Z_C|, |Z_{NC}|$ représentent les mesures dans \mathbb{R}^2 des zones effectives de contact et non-contact

Z_C, Z_{NC} dans $T \cap \Gamma_C$. Supposons que $|Z_C| > 0$ et $|Z_{NC}| > 0$. Les estimations L^1 et L^2 suivantes pour σ_N et ∇u_N sont alors vérifiées :

$$\begin{aligned} \|\sigma_N\|_{L^1(T \cap \Gamma_C)} &\leq \sqrt{2} \frac{|Z_C|^{1/2}}{|Z_{NC}|^{1/2}} h_e^2 \|\nabla \sigma_N\|_{0, T \cap \Gamma_C}, \\ \|\sigma_N\|_{0, T \cap \Gamma_C} &\leq \frac{\sqrt{2}}{|Z_{NC}|^{1/2}} h_e^2 \|\nabla \sigma_N\|_{0, T \cap \Gamma_C}, \\ \|\nabla u_N\|_{L^1(T \cap \Gamma_C)} &\leq \sqrt{2} \frac{|Z_{NC}|^{1/2}}{|Z_C|^{1/2}} h_e^2 \|Hu_N\|_{0, T \cap \Gamma_C}, \\ \|\nabla u_N\|_{0, T \cap \Gamma_C} &\leq \frac{\sqrt{2}}{|Z_C|^{1/2}} h_e^2 \|Hu_N\|_{0, T \cap \Gamma_C}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

où H est la matrice hessienne.

Démonstration. La preuve est différente de celle du lemme précédent et suit les mêmes étapes que celles utilisées dans la preuve originale par H. Poincaré de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger. Commençons par démontrer (1.12). Étant donné que $\sigma_N = 0$ p.p. sur Z_{NC} , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|\sigma_N\|_{0, T \cap \Gamma_C}^2 &= |Z_{NC}|^{-1} \int_{Z_C} \int_{Z_{NC}} (\sigma_N(s) - \sigma_N(t))^2 dt ds \\ &= |Z_{NC}|^{-1} \int_{Z_C} \int_{Z_{NC}} \left(\int_0^1 (s-t) \cdot \nabla \sigma_N(us + (1-u)t) du \right)^2 dt ds \\ &\leq |Z_{NC}|^{-1} h_e^2 \int_{T \cap \Gamma_C} \int_{T \cap \Gamma_C} \int_0^1 |\nabla \sigma_N(us + (1-u)t)|^2 du ds dt \\ &= 2|Z_{NC}|^{-1} h_e^2 \int_{T \cap \Gamma_C} \int_{T \cap \Gamma_C} \int_{1/2}^1 |\nabla \sigma_N(us + (1-u)t)|^2 du ds dt, \end{aligned}$$

où la symétrie entre t et s a été utilisée dans la dernière égalité. En posant $v = us + (1-u)t$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\sigma_N\|_{0, T \cap \Gamma_C}^2 &\leq 2|Z_{NC}|^{-1} h_e^2 \int_{T \cap \Gamma_C} \int_{1/2}^1 \frac{1}{u^2} \int_{T \cap \Gamma_C} |\nabla \sigma_N(v)|^2 dv du dt \\ &\leq 2|Z_{NC}|^{-1} h_e^4 \|\nabla \sigma_N\|_{0, T \cap \Gamma_C}^2, \end{aligned}$$

ce qui démontre (1.12). Pour démontrer les trois inégalités restantes, on suit le même déroulement que celui de la preuve du lemme précédent. \square

1.4 Analyse d'erreur dans le cas bidimensionnel ($d = 2$)

Les deux théorèmes suivants donnent des taux de convergence optimaux dans le cas bidimensionnel en utilisant soit des éléments finis linéaires ou quadratiques. Contrairement à la plupart des résultats de convergence optimaux disponibles pour les approximations standard (inéquation variationnelle, problème mixte...) par élément finis, les deux théorèmes utilisent seulement la régularité Sobolev de la solution du problème continu u .

Théorème 1.1. *On pose $d = 2, k = 1$, $K^h = K_1^h$ ou $K^h = \overline{K_1^h}$. Soient u et u^h les solutions des Problèmes (1.6) et (1.7) respectivement. On suppose que $u \in (H^\tau(\Omega))^2$ avec $3/2 < \tau \leq 2$. Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et u telle que :*

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq Ch^{\tau-1} \|u\|_{\tau,\Omega}. \quad (1.13)$$

Théorème 1.2. *On pose $d = 2, k = 2$, $K^h = K_2^h$ ou $K^h = \widehat{K_2^h}$ ou $K^h = \overline{K_2^h}$. Soient u et u^h les solutions des Problèmes (1.6) et (1.7) respectivement. On suppose que $u \in (H^\tau(\Omega))^2$ avec $3/2 < \tau \leq 5/2$. Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et u tel que :*

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq Ch^{\tau-1} \|u\|_{\tau,\Omega}. \quad (1.14)$$

Remarque 1.6. Dans le cas $k = 2$ et $d = 2$, la convergence optimale sans hypothèse additionnelle pour $2 < \tau \leq 5/2$ a déjà été prouvée dans [7], pour $K^h = \widehat{K_2^h}$ et $K^h = K_2^h$. Dans ce cas, l'apport de la nouvelle technique de preuve porte donc principalement sur le cas $3/2 < \tau \leq 2$.

Démonstration. (du Théorème 1.1, i.e., cas linéaire en dimension 2). Le Lemme de Falk (voir, [29, 39, 69]) nous donne la borne d'erreur suivante :

$$\alpha \|u - u^h\|_{1,\Omega}^2 \leq \inf_{v^h \in K^h} \left(\|u - v^h\|_{1,\Omega}^2 + \int_{\Gamma_C} \sigma_N (v^h - u)_N \, d\Gamma \right) + \inf_{v \in K} \int_{\Gamma_C} \sigma_N (v - u^h)_N \, d\Gamma, \quad (1.15)$$

où α est une constante positive qui dépend uniquement des coefficients de continuité et d'ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$. Le choix usuel pour v^h (on utilisera le même dans cette analyse d'erreur) est $v^h = \mathcal{I}_1^h u$ où \mathcal{I}_1^h est l'opérateur d'interpolation de Lagrange sur V_1^h . On rappelle que $\mathcal{I}_1^h u \in K_1^h \subset \overline{K_1^h}$ et $\|u - \mathcal{I}_1^h u\|_{1,\Omega} \leq Ch^{\tau-1} \|u\|_{\tau,\Omega}$ pour tout $1 < \tau \leq 2$.

(i) : Dans un premier temps, nous allons traiter le cas $K^h = K_1^h$. Dans ce cas, l'erreur de consistance, le second terme dans (1.15) est nulle car $K_1^h \subset K$. Pour démontrer le théorème dans ce cas, il suffit donc de majorer le premier terme de (1.15) de manière optimale

$$\int_{\Gamma_C} \sigma_N (\mathcal{I}_1^h u - u)_N \, d\Gamma,$$

pour $u \in (H^\tau(\Omega))^2$, $3/2 < \tau \leq 2$.

En utilisant le théorème de trace, on déduit que $u_N \in H^{\tau-1/2}(\Gamma_C)$ (u_N est donc continue), $\sigma_N \in H^{\tau-3/2}(\Gamma_C)$ et $u'_N \in H^{\tau-3/2}(\Gamma_C)$ où u'_N représente la dérivée de u_N sur Γ_C . Soit $T \in T^h$ avec $T \cap \Gamma_C \neq \emptyset$. Dans la preuve qui suit, nous allons majorer le terme suivant

$$\int_{T \cap \Gamma_C} \sigma_N (\mathcal{I}_1^h u - u)_N \, d\Gamma, \quad (1.16)$$

où h_e représente la longueur du segment $T \cap \Gamma_C$. Soient Z_C and Z_{NC} les zones effectives de contact et non-contact dans $T \cap \Gamma_C$, i.e. :

$$\begin{aligned} Z_C &= \{x \in T \cap \Gamma_C, u_N(x) = 0\}, \\ Z_{NC} &= \{x \in T \cap \Gamma_C, u_N(x) < 0\}. \end{aligned}$$

$|Z_C|$ et $|Z_{NC}|$ représentent leurs mesures dans \mathbb{R} (on a donc $|Z_C| + |Z_{NC}| = h_e$).

Remarque 1.7. Comme u_N appartient à $H^{\tau-1/2}(\Gamma_C)$ quand $3/2 < \tau \leq 2$, les injections de Sobolev nous assurent que $u_N \in C(\Gamma_C)$. On peut donc en déduire que Z_C et Z_{NC} sont mesurables comme images inverses d'un borélien par une fonction continue. Cette propriété reste vraie dans le cas tridimensionnel.

Si $|Z_C|$ ou $|Z_{NC}|$ est nulle alors il est facile de montrer que le terme intégral dans (1.16) est égal à zéro. On suppose donc que $|Z_C| > 0$ et $|Z_{NC}| > 0$ dans la majoration de (1.16). Nous allons commencer par obtenir deux estimations d'erreur sur (1.16) : une première dépendant de $|Z_{NC}|$, et une seconde dépendant de $|Z_C|$.

Majoration de (1.16) en fonction de Z_{NC} .

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'estimation (1.9) du Lemme 1.1 et les estimations d'erreur standard sur \mathcal{I}_1^h de manière conjointe, on obtient la majoration suivante

$$\begin{aligned} \int_{T \cap \Gamma_C} \sigma_N (\mathcal{I}_1^h u - u)_N \, d\Gamma &\leq \|\sigma_N\|_{0, T \cap \Gamma_C} \|(\mathcal{I}_1^h u - u)_N\|_{0, T \cap \Gamma_C} \\ &\leq C \frac{1}{|Z_{NC}|^{1/2}} h_e^{\tau-1} |\sigma_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C} h_e^{\tau-1/2} |u'_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C} \\ &\leq C \frac{h_e^{2\tau-3/2}}{|Z_{NC}|^{1/2}} \left(|\sigma_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 + |u'_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Majoration de (1.16) en fonction de Z_C .

Cette estimation est obtenue de manière différente de la précédente. Ici, on va utiliser conjointement les estimations d'erreur standard sur \mathcal{I}_1^h (see [20]) et les estimations (1.10), (1.9) du Lemme 1.1 pour obtenir la seconde majoration

$$\begin{aligned} \int_{T \cap \Gamma_C} \sigma_N (\mathcal{I}_1^h u - u)_N \, d\Gamma &\leq \|\sigma_N\|_{0, T \cap \Gamma_C} \|(\mathcal{I}_1^h u - u)_N\|_{0, T \cap \Gamma_C} \\ &\leq C \|\sigma_N\|_{0, T \cap \Gamma_C} h_e^{1/2} \|u'_N\|_{L^1(T \cap \Gamma_C)} \\ &\leq C \frac{h_e^{2\tau-3/2}}{|Z_C|^{1/2}} \left(|\sigma_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 + |u'_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 \right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

On peut maintenant majorer de manière optimale (1.16) en remarquant que soit $|Z_{NC}|$ soit $|Z_C|$ est plus grande que $h_e/2$ et en utilisant alors l'estimation appropriée (1.17) ou (1.18). On obtient donc

$$\int_{T \cap \Gamma_C} \sigma_N (\mathcal{I}_1^h u - u)_N \, d\Gamma \leq C h_e^{2(\tau-1)} \left(|\sigma_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 + |u'_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 \right).$$

On conclut en sommant sur les segments $T \cap \Gamma_C$ et en utilisant le théorème de trace

$$\int_{\Gamma_C} \sigma_N (\mathcal{I}_1^h u - u)_N \, d\Gamma \leq C h^{2(\tau-1)} \left(|\sigma_N|_{\tau-3/2, \Gamma_C}^2 + |u'_N|_{\tau-3/2, \Gamma_C}^2 \right) \leq C h^{2(\tau-1)} \|u\|_{\tau, \Omega}^2,$$

On obtient donc bien l'estimation d'erreur (1.13) pour le cas $K^h = K_1^h$.

(ii) : On considère maintenant le cas $K^h = \overline{K_1^h}$. Comme précédemment, on choisit $v^h = \mathcal{I}_1^h u$ car $\mathcal{I}_1^h u \in \overline{K_1^h}$. Le premier infimum dans (1.15) est donc majoré de manière optimale comme dans le cas $K^h = K_1^h$. Le second infimum dans (1.15) est alors traité en prenant $v = 0$. Pour conclure la preuve du théorème, il reste donc à majorer le terme

$$- \int_{\Gamma_C} \sigma_N u_N^h \, d\Gamma,$$

où $u^h \in \overline{K_1^h}$ est la solution du problème discret. Par la suite, on va considérer l'espace X_0^h des fonctions constantes par morceaux sur le maillage trace $T^h \cap \Gamma_C$:

$$X_0^h = \left\{ \chi^h \in L^2(\Gamma_C) : \chi^h|_{T \cap \Gamma_C} \in P^0(T \cap \Gamma_C), \forall T \in T^h \right\},$$

et la projection $L^2(\Gamma_C)$ classique $\pi_0^h : L^2(\Gamma_C) \rightarrow X_0^h$ définie pour tout $\varphi \in L^2(\Gamma_C)$ par

$$\int_{\Gamma_C} (\varphi - \pi_0^h \varphi) \chi^h d\Gamma = 0, \quad \forall \chi^h \in X_0^h.$$

L'opérateur de projection π_0^h satisfait alors les estimations standard suivantes pour tout $0 < r < 1$, $\varphi \in H^r(\Gamma_C)$ (voir, [6, 38]) :

$$\begin{aligned} \|\varphi - \pi_0^h \varphi\|_{0,T \cap \Gamma_C} &\leq Ch_e^r |\varphi|_{r,T \cap \Gamma_C}, \\ \|\varphi - \pi_0^h \varphi\|_{0,\Gamma_C} + h^{-1/2} \|\varphi - \pi_0^h \varphi\|_{1/2,*,\Gamma_C} &\leq Ch^r |\varphi|_{r,\Gamma_C}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

où $\|\cdot\|_{1/2,*,\Gamma_C}$ représente la norme duale de $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_C}$. Si $r = 0$ (resp. $r = 1$) les estimations précédentes restent valides en changeant $|\varphi|_{r,\cdot}$ par $\|\varphi\|_{0,\cdot}$ (resp. $\|\varphi'\|_{0,\cdot}$). Etant donné que $\pi_0^h \sigma_N$ est une fonction négative et constante par morceaux sur Γ_C , on a :

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_C} \sigma_N u_N^h d\Gamma &\leq - \int_{\Gamma_C} (\sigma_N - \pi_0^h \sigma_N) u_N^h d\Gamma \\ &= - \int_{\Gamma_C} (\sigma_N - \pi_0^h \sigma_N) (u_N^h - u_N) d\Gamma - \int_{\Gamma_C} (\sigma_N - \pi_0^h \sigma_N) u_N d\Gamma \end{aligned} \quad (1.20)$$

Le premier terme dans (1.20) est majoré de manière optimale en utilisant (1.19), le théorème de trace et l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_C} (\sigma_N - \pi_0^h \sigma_N) (u_N^h - u_N) d\Gamma &\leq \|\sigma_N - \pi_0^h \sigma_N\|_{1/2,*,\Gamma_C} \|u_N^h - u_N\|_{1/2,\Gamma_C} \\ &\leq Ch^{\tau-1} |\sigma_N|_{\tau-3/2,\Gamma_C} \|u^h - u\|_{1,\Omega} \\ &\leq Ch^{2(\tau-1)} |\sigma_N|_{\tau-3/2,\Gamma_C}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u - u^h\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Remarque 1.8. Les majorations faisant intervenir l'opérateur π_0^h sur Γ_C sont uniquement optimales pour $3/2 < \tau \leq 5/2$. En effet, l'utilisation de l'opérateur de projection, π_0^h , implique d'utiliser les estimations (1.19) qui sont sous-optimales pour des régularités supérieures à $5/2$. Dans le cas linéaire ces termes ne sont pas limitants mais ils le deviendront dans le cas quadratique limitant ainsi la validité de l'analyse au cas $\tau \leq 5/2$. Cependant cette limitation coïncide avec la limite de régularité des solutions d'un problème de contact général (voir Remarque 1.3).

Il reste alors à majorer de manière optimale le second terme dans (1.20). Nous allons traiter ce terme de deux manières différentes pour tout élément dans $T \cap \Gamma_C$:

$$- \int_{T \cap \Gamma_C} (\sigma_N - \pi_0^h \sigma_N) u_N d\Gamma = \int_{T \cap \Gamma_C} (\sigma_N - \pi_0^h \sigma_N) (\pi_0^h u_N - u_N) d\Gamma. \quad (1.21)$$

Si $|Z_C|$ ou $|Z_{NC}|$ est nul alors le terme intégrale dans (1.21) disparaît. On suppose donc que $|Z_C| > 0$ et $|Z_{NC}| > 0$ dans le reste de la majoration de (1.21).

Majoration de (1.21) en fonction de Z_{NC} .

Pour obtenir cette estimation, nous utilisons les estimations standard sur π_0^h ainsi que les inégalités (1.11), (1.8) du Lemme 1.1.

$$\begin{aligned}
\int_{T \cap \Gamma_C} (\sigma_N - \pi_0^h \sigma_N) (\pi_0^h u_N - u_N) \, d\Gamma &= \int_{T \cap \Gamma_C} \sigma_N (\pi_0^h u_N - u_N) \, d\Gamma \\
&\leq \|\sigma_N\|_{L^1(T \cap \Gamma_C)} \|\pi_0^h u_N - u_N\|_{L^\infty(T \cap \Gamma_C)} \\
&\leq \|\sigma_N\|_{L^1(T \cap \Gamma_C)} h_e^{1/2} \|u'_N\|_{0, T \cap \Gamma_C} \\
&\leq C \frac{h_e^{2\tau-3/2}}{|Z_{NC}|^{1/2}} \left(|\sigma_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 + |u'_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 \right).
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Majoration de (1.21) en fonction de Z_C .

Cette fois-ci, nous utilisons les estimations d'erreur L^2 sur π_0^h dans (2.22) ainsi que (1.11) :

$$\begin{aligned}
\int_{T \cap \Gamma_C} (\sigma_N - \pi_0^h \sigma_N) (\pi_0^h u_N - u_N) \, d\Gamma &\leq \|\sigma_N - \pi_0^h \sigma_N\|_{0, T \cap \Gamma_C} \|\pi_0^h u_N - u_N\|_{0, T \cap \Gamma_C} \\
&\leq C h_e^{\tau-1/2} |\sigma_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C} \|u'_N\|_{0, T \cap \Gamma_C} \\
&\leq C \frac{h_e^{2\tau-3/2}}{|Z_C|^{1/2}} \left(|\sigma_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 + |u'_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 \right).
\end{aligned} \tag{1.23}$$

De la même manière que précédemment, on conclut en remarquant que soit $|Z_{NC}|$ soit $|Z_C|$ est supérieur à $h_e/2$. Ainsi en choisissant de façon appropriée l'estimation (1.22) ou l'estimation (1.23), en sommant sur tous les éléments de contact et en utilisant le théorème de trace, on arrive à :

$$-\int_{\Gamma_C} (\sigma_N - \pi_0^h \sigma_N) u_N \, d\Gamma \leq C h^{2(\tau-1)} \left(|\sigma_N|_{\tau-3/2, \Gamma_C}^2 + |u'_N|_{\tau-3/2, \Gamma_C}^2 \right) \leq C h^{2(\tau-1)} \|u\|_{\tau, \Omega}^2,$$

ce qui démontre (1.13) dans le cas $K^h = \overline{K_1^h}$. \square

Démonstration. (du Théorème 1.2, i.e., cas quadratique 2D). La preuve est séparée en deux parties, une première concernant le cas $3/2 < \tau < 5/2$ et une seconde traitant le cas $\tau = 5/2$.

(i) : $3/2 < \tau < 5/2$. Etant donné que la suite d'inclusions suivante est vérifiée,

$$K_2^h \subset \widehat{K_2^h} \subset \overline{K_2^h}, \tag{1.24}$$

il nous suffit de démontrer la majoration d'erreur d'approximation optimale pour le cas $K^h = K_2^h$ et la majoration d'erreur de consistance optimale pour le cas $K^h = \overline{K_2^h}$.

– Erreur d'approximation (cas $K^h = K_2^h$) :

On pose $v^h = \mathcal{I}_2^h u$ où \mathcal{I}_2^h est l'opérateur d'interpolation de Lagrange sur V_2^h . On a donc $v^h \in K_2^h$. En utilisant conjointement les estimations standard d'erreur sur \mathcal{I}_2^h (voir [15, 20, 28]) et le Lemme 1.1 de la même manière que pour le cas linéaire, on obtient une majoration optimale de l'erreur d'approximation.

- Erreur de consistance (cas $K^h = \overline{K_2^h}$) :

Pour cette partie de l'analyse d'erreur on pose $v = 0$. En utilisant (encore) les estimations standard d'erreur sur π_0^h et le Lemme 1.1 de la même manière que pour le cas linéaire (pour le cas $K^h = \overline{K_1^h}$), on obtient une majoration optimale de l'erreur de consistance.

En combinant ces deux majorations on montre que (1.14) est vérifié quand $3/2 < \tau < 5/2$ pour $K^h = K_2^h$ ou $K^h = \overline{K_2^h}$ ou $K^h = \overline{K_2^h}$.

(ii) : $\tau = 5/2$. Dans ce cas on doit démontrer (voir (1.14)) que

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq Ch^{3/2} \|u\|_{5/2,\Omega}. \quad (1.25)$$

Tout d'abord, on peut supposer que la fonction continue σ_N (et aussi u'_N) est nulle quelque part sur $T \cap \Gamma_C$ (sinon les intégrales dans (1.26) et (1.27) sont nulles) ce qui nous permet d'obtenir les estimations classiques $\|\sigma_N\|_{0,T \cap \Gamma_C} \leq h_e \|\sigma'_N\|_{0,T \cap \Gamma_C}$ et $\|u'_N\|_{0,T \cap \Gamma_C} \leq h_e \|u''_N\|_{0,T \cap \Gamma_C}$. En utilisant (1.24), il nous reste uniquement à majorer de manière optimale les termes suivants :

- Erreur d'approximation pour $K^h = K_2^h$:

On pose $v^h = \mathcal{I}_2^h u$. Le premier terme $\|u - \mathcal{I}_2^h u\|_{1,\Omega}$ est directement borné de manière optimale en utilisant les estimations standard d'erreur sur \mathcal{I}_2^h . Il reste donc uniquement à majorer le terme intégral. En utilisant les estimations standard sur \mathcal{I}_2^h ainsi que l'estimation $\|\sigma_N\|_{0,T \cap \Gamma_C} \leq h_e \|\sigma'_N\|_{0,T \cap \Gamma_C}$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{T \cap \Gamma_C} \sigma_N (\mathcal{I}_2^h u - u)_N \, d\Gamma &\leq \|\sigma_N\|_{0,T \cap \Gamma_C} \|(\mathcal{I}_2^h u - u)_N\|_{0,T \cap \Gamma_C} \\ &\leq Ch_e^3 \|\sigma'_N\|_{0,T \cap \Gamma_C} \|u''_N\|_{0,T \cap \Gamma_C}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

- Erreur de consistance pour $K^h = \overline{K_2^h}$:

A partir des estimations d'erreur standard sur π_0^h et de l'inégalité $\|u'_N\|_{0,T \cap \Gamma_C} \leq h_e \|u''_N\|_{0,T \cap \Gamma_C}$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{T \cap \Gamma_C} (\sigma_N - \pi_0^h \sigma_N) (\pi_0^h u_N - u_N) \, d\Gamma &\leq \|\sigma_N - \pi_0^h \sigma_N\|_{0,T \cap \Gamma_C} \|u_N - \pi_0^h u_N\|_{0,T \cap \Gamma_C} \\ &\leq Ch_e^2 \|\sigma'_N\|_{0,T \cap \Gamma_C} \|u'_N\|_{0,T \cap \Gamma_C} \\ &\leq Ch_e^3 \|\sigma'_N\|_{0,T \cap \Gamma_C} \|u''_N\|_{0,T \cap \Gamma_C}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

En sommant les quantités locales précédentes (1.26) et (1.27) (de la même façon que précédemment), on démontre (1.25). \square

Remarque 1.9. Étant donné qu'aucun des cônes convexes discrets quadratiques n'est inclus dans K , l'erreur de consistance devient limitante dans le cas quadratique pour des régularités Sobolev supérieures à $5/2$. Les estimations sont uniquement valides pour $\tau \leq 5/2$ comme expliqué dans la Remarque 1.8.

1.5 Analyse d'erreur dans le cas tridimensionnel ($d = 3$)

Avant de donner les résultats de convergence dans ce cas, on va expliquer pourquoi la preuve du cas bidimensionnel ne peut pas s'étendre directement aux cas tridimensionnel

bien que le Lemme clef 1.1 de la preuve soit bien vérifié dans le cas tridimensionnel. Pour pouvoir étendre directement les résultats de convergence, il serait nécessaire que toutes les estimations intermédiaires utilisées dans la preuve du Théorème 1.1 restent vérifiées quand $d = 3$. Etant donné que les estimations standard sur \mathcal{I}_1^h et π_0^h sont toujours vérifiées pour $d = 3$ (voir, [6] and [15]), il reste à statuer sur la validité pour $d = 3$ des deux estimations suivantes :

- pour l’analyse de l’erreur d’approximation (quand $K^h = K_1^h$ et $K^h = \overline{K_1^h}$) :

$$\|u_N - \mathcal{I}_1^h u_N\|_{0,T\cap\Gamma_C} \leq C \|\nabla u_N\|_{L^1(T\cap\Gamma_C)}, \quad (1.28)$$

- pour l’analyse de l’erreur de consistance (quand $K^h = \overline{K_1^h}$) :

$$\|u_N - \pi_0^h u_N\|_{L^\infty(T\cap\Gamma_C)} \leq C \|\nabla u_N\|_{0,T\cap\Gamma_C}. \quad (1.29)$$

En fait, les estimations (1.28) et (1.29) ne sont plus valides pour le cas $d = 3$. En effet, (1.29) est le cas limite pour $d = 3$ de l’inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, elle n’est donc pas satisfaite car $H^1(\Gamma_C)$ n’est pas inclus dans $C(\Gamma_C)$ quand $\Gamma_C \subset \mathbb{R}^2$. De même, l’inégalité (1.28) n’est pas satisfaite pour $d = 3$, ceci étant dû au fait que les fonctions de $W^{1,1}(\Gamma_C)$ ne sont pas continues lorsque Γ_C est un sous-espace de \mathbb{R}^2 . Pour ces deux raisons, un travail spécifique est nécessaire pour pouvoir utiliser un schéma de preuve similaire à celui du cas bidimensionnel dans le cas tridimensionnel. On va donc éviter ces deux limitations de la manière suivante :

- Pour contourner (1.28), l’idée principale est de changer l’opérateur d’interpolation de Lagrange par un opérateur de quasi-interpolation adapté aux fonctions non-régulières (voir, [22, 43, 70, 73]) en gardant à l’esprit que nous avons besoin de conserver le signe, et d’avoir des propriétés d’approximation d’ordre supérieur à 1 (pour simplifier, nous avons besoin que les fonctions affines soient reproduites à l’identique). Etant donné que les fonctions considérées ne sont pas forcément nulles sur les bords de Γ_C , il y a un résultat de non existence d’un tel opérateur pour les nœuds extrêmes, ce qui nous oblige à légèrement retoucher aux cônes convexes des déplacements admissibles introduits précédemment. En premier lieu, nous rappelons la définition d’un nœud extrême, voir [61] : $e \in \partial\Gamma_C$ est un nœud extrême de $\overline{\Gamma_C}$ s’il existe une fonction affine a_e tel que

$$a_e(e) = 0 \quad \text{et} \quad a_e(x) > 0, \forall x \in \overline{\Gamma_C}, x \neq e.$$

De manière plus géométrique, $e \in \partial\Gamma_C$ est un nœud extrême de $\overline{\Gamma_C}$ s’il n’appartient à aucun segment ouvert reliant deux points de $\overline{\Gamma_C}$. De ce fait, un carré possède 4 nœuds extrêmes (les 4 sommets), un domaine en L contient 5 nœuds extrêmes (voir Figure 1.2).

Soit N_e l’ensemble des nœuds extrêmes de $\overline{\Gamma_C}$. Si $e \in N_e$, soit $\Delta_e \subset \overline{\Gamma_C}$ l’union des triangles (*i.e.*, le patch) ayant e comme sommet et posons $E = \cup_{e \in N_e} \Delta_e$. On peut donc définir :

$$K_1^{h,e} = \left\{ v^h \in V_1^h : v_N^h \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_C \setminus E, \quad \int_{\Delta_e} v_N^h d\Gamma \leq 0, \forall e \in N_e \right\} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \overline{K_1^{h,e}} = & \left\{ v^h \in V_1^h, \int_{T\cap\Gamma_C} v_N^h d\Gamma \leq 0, \forall T \in \mathcal{T}^h, T \cap \Gamma_C \subset \Gamma_C \setminus E, \right. \\ & \left. \int_{\Delta_e} v_N^h d\Gamma \leq 0, \forall e \in N_e \right\}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

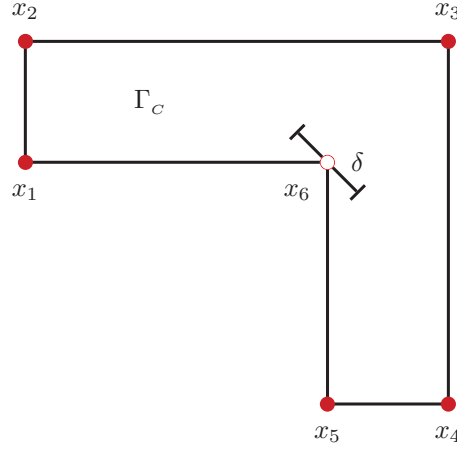


FIGURE 1.2 – Exemple de nœuds extrêmes dans un domaine en forme de L, Γ_C . les sommets x_1 à x_5 sont des nœuds extrêmes alors que x_6 est uniquement un point du bord de Γ_C (en effet, on peut construire un segment ouvert δ reliant deux points de $\overline{\Gamma_C}$ et contenant x_6 .)

On remarque qu'aucun de ces cônes convexes n'est inclus dans K . Mais, la série d'inclusions suivante est vérifiée $K_1^{h,e} \subset \overline{K_1^{h,e}}$, $K_1^h \subset K_1^{h,e}$, $\overline{K_1^h} \subset \overline{K_1^{h,e}}$. De plus, on remarque que dans le cas où tous les nœuds extrêmes de $\overline{\Gamma_C}$ appartiennent uniquement à un élément de contact alors $\overline{K_1^h} = \overline{K_1^{h,e}}$.

- Pour contourner (1.29), on prouve en utilisant le Lemme 1.3, un résultat un peu plus faible que (1.29) (voir (1.37)) qui néanmoins nous permet d'utiliser le Lemme 1.1 pour obtenir les mêmes taux de convergence que dans le cas bidimensionnel.

Théorème 1.3. Posons $d = 3, k = 1$, $K^h = K_1^{h,e}$ ou $K^h = \overline{K_1^{h,e}}$. Soient u et u^h les solutions des Problèmes (1.6) et (1.7) respectivement. Supposons que $u \in (H^\tau(\Omega))^3$ avec $3/2 < \tau \leq 2$. Alors, Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et u telle que

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq Ch^{\tau-1} \|u\|_{\tau,\Omega}. \quad (1.32)$$

Avant de s'attaquer à la preuve du Théorème 1.3, nous allons donner les résultats de convergence dans le cas quadratique. Comme dans le cas linéaire, voir (1.30), (1.31), on peut définir des cônes convexes modifiés $K_2^{h,e}$, $\widehat{K_2^{h,e}}$, $\widehat{K_2^{h,e}}$, $\overline{K_2^{h,e}}$ en gardant la même définition que pour K_2^h , $\widehat{K_2^h}$, $\widehat{K_2^h}$, $\overline{K_2^h}$ (voir sous-section 1.2.2.2) pour les triangles appartenant à $\Gamma_C \setminus E$ (i.e., sauf pour les patches Δ_e où e est un nœud extrême de $\overline{\Gamma_C}$, voir Figure 1.3). Sur les patches, la condition de non-pénétration devient, comme dans le cas linéaire, $\int_{\Delta_e} v_N^h d\Gamma \leq 0$.

Théorème 1.4. Posons $d = 3, k = 2$, $K^h = K_2^{h,e}$ ou $K^h = \widehat{K_2^{h,e}}$ ou $K^h = \widetilde{K_2^{h,e}}$ ou $K^h = \overline{K_2^{h,e}}$. Soient u et u^h les solutions des Problèmes (1.6) et (1.7) respectivement. On suppose que $u \in (H^\tau(\Omega))^3$ avec $3/2 < \tau \leq 5/2$. Alors, Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et u telle que

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq Ch^{\tau-1} \|u\|_{\tau,\Omega}. \quad (1.33)$$

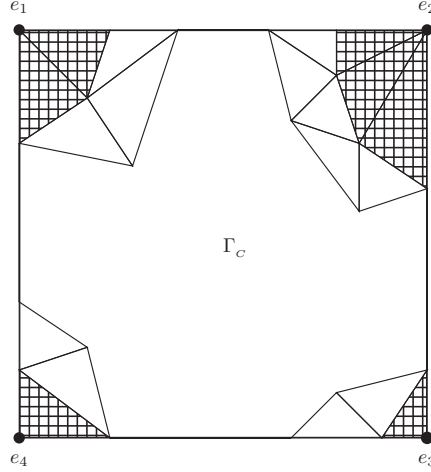


FIGURE 1.3 – Les quatre nœuds extrêmes d'un carré et leur patch associé (surface hachurée) Δ_{e_1} à Δ_{e_4} .

Démonstration. (du Théorème 1.3, i.e., cas linéaire tridimensionnel). Comme pour les cas de figure précédents, l'inclusion des cônes convexes des déplacements admissibles nous permet de prouver uniquement la majoration optimale de l'erreur d'approximation pour le cas $K^h = K_1^{h,e}$, et la majoration optimale de l'erreur de consistance pour le cas $K^h = \overline{K_1^{h,e}}$.

Erreur d'approximation (cas $K^h = K_1^{h,e}$) :

On pose

$$v^h = \mathcal{I}_1^h u + R_1^h (\mathcal{J}_1^h u_N - \mathcal{I}_1^h u_N)$$

où R_1^h est un opérateur de relèvement discret de W_1^h dans V_1^h (W_1^h est l'espace de trace normal de V_1^h sur Γ_C). Cet opérateur peut être obtenu en combinant un opérateur de relèvement continu standard avec un opérateur de régularisation (voir, [70, 13]). L'opérateur de quasi-interpolation $\mathcal{J}_1^h : W^{1,1}(\Gamma_C) \mapsto W_1^h$ est défini de la manière suivante pour une fonction v :

- Pour les nœuds intérieurs x dans Γ_C , on opte pour la définition de l'opérateur de Chen-Nochetto (qui est un opérateur de Clément utilisant des fonctions polynomiales de degré 0 [22]). Cet opérateur préserve les fonctions affines et conserve le signe :

$$(\mathcal{J}_1^h v)(x) = \frac{1}{\text{meas}(B)} \int_B v,$$

où B est la plus grande boule ouverte centrée en x tel que B est contenue par l'union d'éléments contenant x .

- On considère maintenant les nœuds du bord $\overline{\Gamma_C}$.
 - Pour les nœuds x appartenant à $\overline{\Gamma_C} \cap \overline{\Gamma_D}$, on pose $(\mathcal{J}_1^h v)(x) = 0$.
 - Pour les autres nœuds x qui ne sont pas des points extrêmes, on pose (voir [61]) :

$$(\mathcal{J}_1^h v)(x) = \frac{1}{|L|} \int_L v,$$

où $|L| = \alpha h$ est la longueur du segment ouvert L (α est fixé), centré en x et inclus dans $\overline{\Gamma_C}$. Il est évident que cette définition préserve à la fois les fonctions

affines et le signe. Finalement, il reste à définir \mathcal{J}_1^h pour les nœuds extrêmes. On considère donc un nœud extrême e de $\overline{\Gamma_C}$ et l'union des triangles de $\overline{\Gamma_C}$ admettant e comme sommet, notée Δ_e . Sur Δ_e , on impose que l'opérateur de quasi interpolation conserve la moyenne, c'est à dire :

Trouver $\mathcal{J}_1^h v \in P_1(\Delta_e)$ tel que

$$\int_{\Delta_e} v - \mathcal{J}_1^h v = 0.$$

Il est facile de voir que cette définition permet

- d'obtenir une unique valeur de $(\mathcal{J}_1^h v)(e)$ (qui ne préserve par forcément le signe),
- de préserver localement les fonctions affines.

De part la construction de \mathcal{J}_1^h , on déduit que $v^h \in K_1^{h,e}$. Soit $v \in W^{1,p}(\Gamma_C)$ avec $p \geq 1$, on peut prouver en utilisant une inégalité de trace "à l'échelle" que pour tout nœud x sur $\overline{\Gamma_C}$ qui n'est pas extrême, on a $|(\mathcal{J}_1^h v)(x)| \leq C(h_C^{-2/p} \|v\|_{L^p(\Delta_x)} + h_C^{1-2/p} \|\nabla v\|_{L^p(\Delta_x)})$ où Δ_x est le patch entourant x . Si x est un nœud extrême on obtient le même type d'inégalité où Δ_x doit être remplacé par le patch étendu noté également Δ_x pour simplifier. On a donc pour tout triangle $T \cap \Gamma_C$, l'estimation de stabilité suivante :

$$\|\mathcal{J}_1^h v\|_{0,T \cap \Gamma_C} \leq C(h_C^{1-2/p} \|v\|_{L^p(\Delta_{T \cap \Gamma_C})} + h_C^{2-2/p} \|\nabla v\|_{L^p(\Delta_{T \cap \Gamma_C})}),$$

où $\Delta_{T \cap \Gamma_C}$ est le patch entourant $T \cap \Gamma_C$. En choisissant $p = 1$ et en utilisant la propriété de préservation locale des fonctions constantes de l'opérateur \mathcal{J}_1^h (les triangles contenant un nœud dans $\overline{\Gamma_C} \cap \overline{\Gamma_D}$ sont traités comme dans [18]) conjointement avec la propriété $\|v - \pi_0^h v\|_{0,\Delta_{T \cap \Gamma_C}} \leq C \|\nabla v\|_{L^1(\Delta_{T \cap \Gamma_C})}$ (voir Corollaire 4.2.3 dans [87]) on obtient

$$\|u_N - \mathcal{J}_1^h u_N\|_{0,T \cap \Gamma_C} \leq C \|\nabla u_N\|_{L^1(\Delta_{T \cap \Gamma_C})}. \quad (1.34)$$

Cette inégalité est le type d'estimation que l'on ne pouvait pas obtenir avec l'opérateur d'interpolation de Lagrange. De plus, en utilisant l'estimation de stabilité précédente sur \mathcal{J}_1^h avec $p = 2$ conjointement avec la propriété de préservation locale des fonctions affines de \mathcal{J}_1^h , on déduit que \mathcal{J}_1^h satisfait les mêmes estimations d'erreur que l'opérateur d'interpolation de Lagrange linéaire. En utilisant la continuité de l'opérateur de relèvement et une inégalité inverse, il vient que :

$$\begin{aligned} \|u - v^h\|_{1,\Omega} &\leq \|u - \mathcal{I}_1^h u\|_{1,\Omega} + C \|\mathcal{J}_1^h u_N - \mathcal{I}_1^h u_N\|_{1/2,\Gamma_C} \\ &\leq \|u - \mathcal{I}_1^h u\|_{1,\Omega} \\ &\quad + C h_C^{-1/2} (\|u_N - \mathcal{I}_1^h u_N\|_{0,\Gamma_C} + \|u_N - \mathcal{J}_1^h u_N\|_{0,\Gamma_C}) \\ &\leq C h^{\tau-1} \|u\|_{\tau,\Omega} \end{aligned} \quad (1.35)$$

pour tout $1 < \tau \leq 2$. En combinant ces estimations avec le Lemme 1.1 (on utilise $\Delta_{T \cap \Gamma_C}$ à la place de $T \cap \Gamma_C$ dans le Lemme) on obtient une majoration locale optimale de l'erreur d'approximation :

$$\int_{T \cap \Gamma_C} \sigma_N(\mathcal{J}_1^h u - u)_N \, d\Gamma \leq C h_e^{2(\tau-1)} \left(|\sigma_N|_{\tau-3/2,\Delta_{T \cap \Gamma_C}}^2 + |\nabla u_N|_{\tau-3/2,\Delta_{T \cap \Gamma_C}}^2 \right).$$

Pour conclure la majoration de l'erreur d'approximation, il suffit d'effectuer une sommation sur les éléments $T \cap \Gamma_C$

$$\int_{\Gamma_C} \sigma_N(v^h - u)_N \, d\Gamma = \int_{\Gamma_C} \sigma_N(\mathcal{J}_1^h u - u)_N \, d\Gamma \leq C h^{2(\tau-1)} \|u\|_{\tau,\Omega}^2, \quad (1.36)$$

ce qui conclut la preuve pour ce cas.

Erreur de consistance (cas $K^h = \overline{K_1^{h,e}}$) :

Dans un premier temps, nous allons utiliser un résultat d'approximation issu de [87], on rappelle ce résultat dans le Lemme suivant :

Lemme 1.3. *Soit X_a un espace linéaire normé $\|\cdot\|_a$ et $X \subset X_a$ un espace de Banach de norme $\|\cdot\|$. On suppose $\|\cdot\| = \|\cdot\|_a + \|\cdot\|_b$ où $\|\cdot\|_b$ est une semi-norme et que les ensembles bornés dans X sont précompacts dans X_a . On pose $Y = X \cap \{x : \|x\|_b = 0\}$. Si $L : X \rightarrow Y$ est une projection, alors il existe une constante C indépendante de L telle que :*

$$\|x - L(x)\|_a \leq C \|L\| \|x\|_b$$

pour tout $x \in X$.

Soit \tilde{T} un triangle de référence. On pose $X_a = L^\infty(\tilde{T})$ et $X = H^{\tau-1/2}(\tilde{T})$. Comme $\tau > 3/2$ on a $X \subset X_a$. Il est facile de vérifier que $\|\tilde{v}\| = \|\tilde{v}\|_{L^\infty(\tilde{T})} + \|\nabla \tilde{v}\|_{0,\tilde{T}} + |\nabla \tilde{v}|_{\tau-3/2,\tilde{T}}$ est une norme sur $H^{\tau-1/2}(\tilde{T})$ (en utilisant l'inclusion $X \subset X_a$) étant donné qu'elle est équivalente à la norme usuelle $\|\tilde{v}\|_{0,\tilde{T}} + \|\nabla \tilde{v}\|_{0,\tilde{T}} + |\nabla \tilde{v}|_{\tau-3/2,\tilde{T}}$. De plus, $\|\nabla \tilde{v}\|_{0,\tilde{T}} + |\nabla \tilde{v}|_{\tau-3/2,\tilde{T}}$ est une semi-norme sur $H^{\tau-1/2}(\tilde{T})$. L'inclusion $X \subset X_a$ est compacte, donc l'ensemble borné X est précompact dans X_a . On remarque facilement que Y est l'espace des fonctions constantes sur \tilde{T} . Si L représente l'opérateur de projection $L^2(\tilde{T})$ sur les fonctions constantes sur \tilde{T} , on obtient

$$\|\tilde{v} - L\tilde{v}\|_{L^\infty(\tilde{T})} \leq C \|L\| \left(\|\nabla \tilde{v}\|_{0,\tilde{T}} + |\nabla \tilde{v}|_{\tau-3/2,\tilde{T}} \right), \quad \forall \tilde{v} \in H^{\tau-1/2}(\tilde{T}).$$

On note maintenant $v(\eta(\tilde{x})) = \tilde{v}(\tilde{x})$ où $\eta : \tilde{T} \rightarrow \overline{T \cap \Gamma_C}$ est une transformation affine. Grâce à un argument de mise à l'échelle, on obtient que $\|v - \pi_0^h v\|_{L^\infty(T \cap \Gamma_C)} = \|\tilde{v} - L\tilde{v}\|_{L^\infty(\tilde{T})}$, $\|\nabla v\|_{0,T \cap \Gamma_C} = \|\nabla \tilde{v}\|_{0,\tilde{T}}$ et $|\nabla v|_{\tau-3/2,T \cap \Gamma_C} = h_e^{3/2-\tau} |\nabla \tilde{v}|_{\tau-3/2,\tilde{T}}$. Donc

$$\|v - \pi_0^h v\|_{L^\infty(T \cap \Gamma_C)} \leq C \left(\|\nabla v\|_{0,T \cap \Gamma_C} + h_e^{\tau-3/2} |\nabla v|_{\tau-3/2,T \cap \Gamma_C} \right). \quad (1.37)$$

Le reste de l'analyse de l'erreur de consistance est alors similaire au cas bidimensionnel en changeant X_0^h avec l'espace légèrement plus petit $X_0^{h,e}$ des fonctions constantes par morceaux sur le maillage trace sur Γ_C et sur les patchs entourant les nœuds extrêmes de $\overline{\Gamma_C}$:

$$X_0^{h,e} = \left\{ \chi^h \in L^2(\Gamma_C) : \chi^h|_{T \cap \Gamma_C} \in P^0(T \cap \Gamma_C), \forall T \in \mathcal{T}^h, T \cap \Gamma_C \subset \Gamma_C \setminus E, \right. \\ \left. \chi^h|_{\Delta_e} \in P^0(\Delta_e), \forall e \in N_e \right\},$$

et en considérant l'opérateur de projection L^2 classique $\pi_0^{h,e} : L^2(\Gamma_C) \rightarrow X_0^{h,e}$. Les termes supplémentaires dans (1.37) ne changent pas les estimations (1.22) et (1.23) qui deviennent

respectivement

$$\begin{aligned}
& \int_{T \cap \Gamma_C} (\sigma_N - \pi_0^{h,e} \sigma_N) (\pi_0^{h,e} u_N - u_N) d\Gamma \\
& \leq \| \sigma_N \|_{L^1(T \cap \Gamma_C)} \| u_N - \pi_0^{h,e} u_N \|_{L^\infty(T \cap \Gamma_C)} \\
& \leq C \frac{h_e^{2\tau-1}}{|Z_{NC}|^{1/2}} \left(|\sigma_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 + |\nabla u_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 \right) \\
& \quad + C \frac{|Z_C|^{1/2} h_e^{2\tau-2}}{|Z_{NC}|^{1/2}} \left(|\sigma_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 + |\nabla u_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 \right) \\
& \leq C \frac{h_e^{2\tau-1}}{|Z_{NC}|^{1/2}} \left(|\sigma_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 + |\nabla u_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 \right) \tag{1.38}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{T \cap \Gamma_C} (\sigma_N - \pi_0^{h,e} \sigma_N) (\pi_0^{h,e} u_N - u_N) d\Gamma \\
& \leq \| \sigma_N - \pi_0^{h,e} \sigma_N \|_{0, T \cap \Gamma_C} \| u_N - \pi_0^{h,e} u_N \|_{0, T \cap \Gamma_C} \\
& \leq C \frac{h_e^{2\tau-1}}{|Z_C|^{1/2}} \left(|\sigma_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 + |\nabla u_N|_{\tau-3/2, T \cap \Gamma_C}^2 \right). \tag{1.39}
\end{aligned}$$

Alors, étant donné que soit $|Z_{NC}|$ soit $|Z_C|$ est plus grand que Ch_e^2 , on choisit (1.38) ou (1.39) respectivement et l'on conclut par sommation que

$$\begin{aligned}
- \int_{\Gamma_C} (\sigma_N - \pi_0^{h,e} \sigma_N) u_N d\Gamma & \leq Ch^{2(\tau-1)} \left(|\sigma_N|_{\tau-3/2, \Gamma_C}^2 + |\nabla u_N|_{\tau-3/2, \Gamma_C}^2 \right) \\
& \leq Ch^{2(\tau-1)} \|u\|_{\tau, \Omega}^2,
\end{aligned}$$

ce qui finit la preuve du théorème. \square

Démonstration. (du Théorème 1.4, i.e., cas quadratique 3D). Comme dans le cas bidimensionnel, la preuve est scindée en deux parties, la première concernant le cas $3/2 < \tau < 5/2$ et la seconde concernant le cas $\tau = 5/2$.

(i) : $3/2 < \tau < 5/2$. En utilisant la suite d'inclusions

$$K_2^{h,e} \subset \widehat{K_2^{h,e}} \subset \overline{K_2^{h,e}} \text{ et } K_2^{h,e} \subset \widetilde{K_2^{h,e}} \subset \overline{K_2^{h,e}},$$

il suffit de démontrer la majoration optimale de l'erreur d'approximation dans le cas $K^h = K_2^{h,e}$ et de l'erreur de consistance dans le cas $K^h = \overline{K_2^{h,e}}$ pour obtenir l'estimation (1.33).

Erreur d'approximation (cas $K^h = K_2^{h,e}$) :

On pose

$$v^h = \mathcal{I}_2^h u + R_2^h (\mathcal{J}_1^h u_N - \mathcal{I}_2^h u_N)$$

où R_2^h est un opérateur de relèvement discret de W_2^h dans V_2^h (W_2^h est l'espace de trace normale V_2^h on Γ_C) et \mathcal{I}_2^h est l'opérateur d'interpolation de Lagrange sur V_2^h . On remarque que l'on utilise l'opérateur de quasi-interpolation d'ordre 1 \mathcal{J}_1^h : ce choix est suffisant pour notre majoration d'erreur étant donné que l'on utilise cet opérateur uniquement sur $\overline{\Gamma_C}$ où u_N n'est pas plus régulière que H^2 ($\tau < 5/2$). Bien sur, par définition, v_N^h est linéaire par morceaux et égal à $\mathcal{J}_1^h u_N$ sur Γ_C . En utilisant la définition de $K_1^{h,e}$ et $K_2^{h,e}$, on peut alors facilement vérifier que $v^h \in K_2^{h,e}$. L'estimation (1.35) reste alors valide dans

le cas $3/2 < \tau \leq 5/2$ car $\|u_N - \mathcal{J}_1^h u_N\|_{0,\Gamma_C} \leq Ch_C^{\tau-1/2} \|u_N\|_{\tau-1/2,\Gamma_C} \leq Ch_C^{\tau-1/2} \|u\|_{\tau,\Omega}$ et l'estimation (1.36) est traitée similairement à la preuve du Théorème 1.3.

Erreur de consistance (cas $K^h = \overline{K_2^{h,e}}$) :

L'erreur de consistance est majorée en suivant la preuve du Théorème 1.3.

(ii) : $\tau = 5/2$. Contrairement au cas bidimensionnel, σ_N et ∇u_N ne sont pas continus sur Γ_C . En analysant en détail la preuve du théorème précédent, on remarque que pour conclure la preuve il nous manque uniquement l'extension du Lemme 1.1 pour le cas $d = 3$ et $\tau = 5/2$. C'est le but du Lemme 1.2 qui nous permet de conclure cette preuve. \square

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit un nouveau schéma de preuve pour démontrer l'optimalité (sans hypothèse autre que la régularité Sobolev de la solution du problème continu) des approches éléments finis standard du problème de Signorini. On apporte donc une réponse au cas encore non traité sans ajout d'hypothèse (à savoir, les cas 2D linéaire et quadratique pour $3/2 < \tau \leq 2$ et les cas 3D). On remarque qu'il reste tout de même une légère limitation dans le cas 3D où l'on a été obligé pour des raisons techniques de modifier légèrement la définition du plus petit cône convexe. L'introduction de ces nouvelles techniques de preuve permet aussi de se dispenser des hypothèses supplémentaires utilisées dans le cadre des méthodes "mortar" en 2D. Le cas 3D reste plus complexe, car il nécessiterait une définition particulière de K^h (similaire à celle introduite dans ce chapitre) pour traiter correctement le problème des nœuds extrêmes. Dans le cas qui va nous intéresser dans le chapitre à venir, ces méthodes de preuve pourront être réutilisées directement pour démontrer les résultats optimaux de convergence pour la méthode locale proposée.

Chapitre 2

Le problème du contact unilatéral avec maillages incompatibles

2.1 Introduction et configuration du problème

Ce chapitre se concentre sur le problème de contact entre deux objets élastiques dont les maillages ne coïncident pas forcément, *i.e.*, le cas de figure des maillages incompatibles. Cette situation est fréquemment rencontrée dans les études industrielles et a été beaucoup étudiée du point de vue théorique ces vingt dernières années. On sait que les conditions de contact locales de type nœud-segment en 2D et l'équivalent nœud-facette en 3D génèrent des solutions montrant des oscillations pouvant dégrader la qualité et la précision des résultats et ralentir le temps de calcul nécessaire pour atteindre les critères de convergence. Au contraire, les approches “mortar” pour la décomposition de domaine [14] gèrent de manière optimale le cas des maillages incompatibles et leur adaptation au problème de contact a donné des résultats intéressants à la fin des années 90 (voir [5, 9, 10, 44, 45]). Pour résumer, l'approche initiale inspirée directement de [14], consiste à utiliser une projection L^2 d'un espace d'éléments finis linéaires vers l'autre au niveau de la zone de contact dans le cas bidimensionnel. D'un point de vue numérique, le concept des méthodes “mortar” a été étendu à de multiples configurations de contact comme le frottement, les éléments finis quadratiques, les grandes déformations, le contact tridimensionnel ... (voir [19, 21, 26, 30, 38, 53, 57, 64, 66, 67, 76, 77, 80, 82]).

On va introduire dans ce chapitre la méthode proposée, intitulée méthode “Local Average Contact” (LAC), pour répondre à la problématique de cette thèse. On propose une condition de contact simple qui d'un côté nous permet d'obtenir des taux de convergence théoriques optimaux en norme H^1 et de l'autre côté reste facilement implémentable dans un code de calcul par éléments finis industriel pour les tous les types d'éléments finis couramment utilisés (à savoir les triangles à 3 et 6 nœuds, les quadrangles à 4 et 8 nœuds pour les cas 2D et les tétraèdres à 4 et 10 nœuds, les hexaèdres à 8, 20 ou 27 nœuds pour le cas 3D). On va donc considérer une condition de non-interpénétration discrète dans laquelle le saut de déplacement $[u_N^h]$ doit être négatif en moyenne sur une famille de macro-maillages (constitués d'unions d'éléments d'un des maillages traces sur la zone de contact) qui forme un macro-maillage de la zone de contact potentielle Γ_C . Le plus grand avantage de cette formulation est qu'elle mène naturellement à une méthode locale ce qui rendra l'implémentation numérique générique plus aisée, en particulier dans le code calcul par éléments

finis industriel qui sera utilisé par la suite, à savoir **Code_Aster** [25]. Ce chapitre sera consacré à la définition et à l'étude mathématique de convergence de la méthode LAC dans le cas bidimensionnel et tridimensionnel.

Soient Ω^1 et Ω^2 deux domaines polygonaux ou polyédriques dans \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$ représentant la configuration initiale de deux objets élastiques (voir Figure 2.1). Le bord de chaque domaine $\partial\Omega^\ell$, $\ell = 1, 2$ est composé de trois ouverts disjoints Γ_N^ℓ , Γ_D^ℓ et Γ_C avec $\overline{\Gamma_N^\ell} \cup \overline{\Gamma_D^\ell} \cup \overline{\Gamma_C} = \partial\Omega^\ell$. On suppose que les mesures dans \mathbb{R}^{d-1} de Γ_C et Γ_D^ℓ sont strictement positives et, pour simplifier, que Γ_C est un segment quand $d = 2$ ou un polygone quand $d = 3$. Les objets sont soumis à une condition limite de Neumann sur Γ_N^ℓ avec une densité de charge $F_\ell \in (L^2(\Gamma_N^\ell))^d$, à une condition limite de Dirichlet sur Γ_D^ℓ (pour simplifier on suppose qu'ils sont encastres sur Γ_D^ℓ) et à une charge volumique notée $f_\ell \in (L^2(\Omega^\ell))^d$ dans Ω^ℓ . Finalement, on impose une condition de contact unilatéral sans frottement entre les deux objets sur Γ_C .

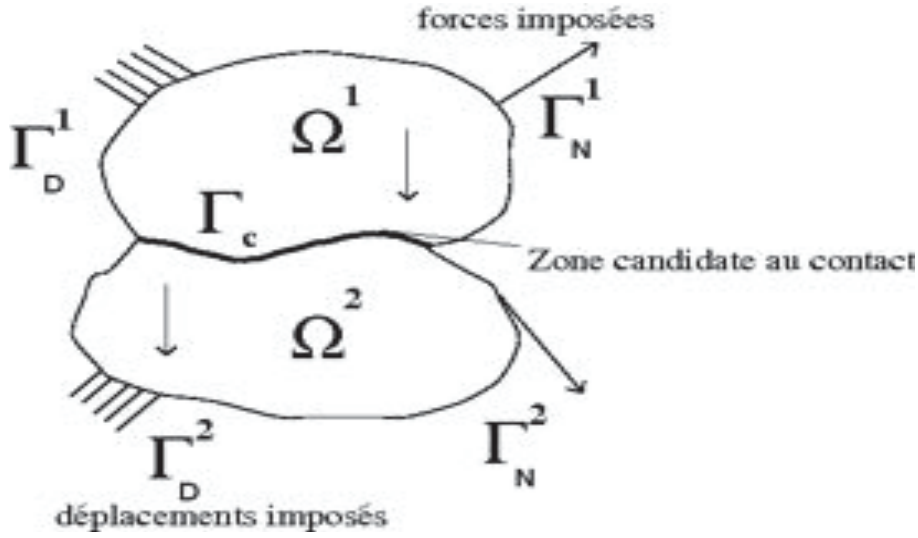


FIGURE 2.1 – Deux corps élastiques en contact.

Le problème consiste à trouver le champ de déplacement $u = (u_1, u_2) : \overline{\Omega^1} \times \overline{\Omega^2} \rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifiant (2.1)–(2.6) avec $\ell = 1, 2$:

$$-\operatorname{div} \sigma_\ell(u_\ell) = f_\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell, \quad (2.1)$$

$$\sigma(u_\ell) = \mathcal{A}_\ell \varepsilon(u_\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell, \quad (2.2)$$

$$\sigma_\ell(u_\ell) n_\ell = F_\ell \quad \text{sur } \Gamma_N^\ell, \quad (2.3)$$

$$u_\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D^\ell, \quad (2.4)$$

où n_ℓ désigne la normale sortante à Ω^ℓ sur $\partial\Omega^\ell$. Sur Γ_C , on décompose les champs de déplacement et de contrainte selon la direction normale et tangentielle

$$u_{\ell N} = u_\ell \cdot n_\ell, \quad u_{\ell T} = u_\ell - u_{\ell N} n_\ell,$$

$$\sigma_{\ell N} = (\sigma_\ell(u_\ell) n_\ell) \cdot n_\ell, \quad \sigma_{\ell T} = \sigma_\ell(u_\ell) n_\ell - \sigma_{\ell N} n_\ell,$$

et on désigne par

$$[u_N] = u_{1N} + u_{2N}$$

le saut de déplacement normal à travers l'interface de contact.

La condition de contact unilatéral sur Γ_C est exprimée par les conditions de complémentarité suivantes :

$$[u_N] \leq 0, \quad \sigma_{1_N} = \sigma_{2_N} = \sigma_N \leq 0, \quad [u_N]\sigma_N = 0, \quad (2.5)$$

où un jeu nul a été choisi sur la configuration de référence.

L'absence de frottement sur Γ_C se traduit par : pour $\ell = 1, 2$

$$\sigma_{\ell_T} = 0. \quad (2.6)$$

On introduit l'espace de Hilbert suivant :

$$V_\ell = \left\{ v_\ell \in (H^1(\Omega^\ell))^d : v_\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_D^\ell \right\},$$

$$V = V_1 \times V_2.$$

L'ensemble des déplacements admissibles satisfaisant la condition de non-interpénétration sur Γ_C est :

$$K = \{ v \in V : [v_N] \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C \}.$$

On introduit maintenant les formes linéaire et bilinéaire suivantes, pour tous $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ dans V :

$$a(u, v) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathcal{A}_\ell \varepsilon(u_\ell) : \varepsilon(v_\ell) d\Omega^\ell, \quad l(v) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_\ell \cdot v_\ell d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_N^\ell} F_\ell \cdot v_\ell d\Gamma^\ell.$$

Des hypothèses précédentes, on déduit que $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique, V -elliptique et continue sur $V \times V$ et l est une forme linéaire continue sur V . La formulation faible du Problème (2.1)–(2.6) est alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ vérifiant :} \\ a(u, v - u) \geq l(v - u), \quad \forall v \in K. \end{cases} \quad (2.7)$$

D'après le théorème de Stampacchia, le Problème (2.7) admet une unique solution.

2.2 La méthode LAC dans le cas bidimensionnel ($d = 2$)

Soit $V_\ell^h \subset V_\ell$ une famille d'espaces de dimension finie indexée par h_ℓ et associé à une famille T_ℓ^h de triangulations ou quadrangulations du domaine Ω^ℓ , $\ell = 1, 2$ (voir [15, 20, 28]). La notation h_ℓ désigne le plus grand diamètre des éléments (fermés) $T \in T_\ell^h$. On utilise une approche par éléments finis continus de degré $k = 1$ ou $k = 2$, *i.e.* :

$$V_\ell^h = \left\{ v_\ell^h \in (C(\overline{\Omega}^\ell))^2 : v_\ell^h|_T \in P^k(T), \forall T \in T_\ell^h, v_\ell^h = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\}.$$

On pose

$$V^h = V_1^h \times V_2^h.$$

Le cône convexe discret des déplacements admissibles, satisfaisant la condition de non-interpénétration en moyenne locale est décrit de la manière suivante :

$$K^h = \left\{ v^h \in V^h : \int_{I^m} [v_N^h] d\Gamma \leq 0 \quad \forall I^m \in I^M \right\}.$$

Si $k = 1$ alors I^M est un macro-maillage de dimension 1 constitué par des macro-éléments I^m regroupant (voir Définition 2.1 ci-après) deux segments contigus de $T_1^h \cap \Gamma_C$ (*i.e.*, le maillage de dimension 1 sur Γ_C obtenu à partir de T_1^h). Dans le cas $k = 2$, I^M est simplement le maillage trace sur Γ_C provenant de T_1^h . Le seul prérequis (quand $k = 1$ ou $k = 2$) est que tout élément $I^m \in I^M$ possède un degré de liberté dont le support est interne au macro-élément. Nous avons choisi de définir le macro-maillage sur T_1^h mais une définition symétrique de I^M en utilisant T_2^h peut être aussi envisagée. La version discrète de l'inéquation variationnelle (2.7) est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^h \in K^h \text{ vérifiant :} \\ a(u^h, v^h - u^h) \geq l(v^h - u^h), \quad \forall v^h \in K^h. \end{cases} \quad (2.8)$$

D'après le théorème de Stampacchia, le Problème (2.8) admet une unique solution.

Remarque 2.1. Étant donné que $K^h \not\subset K$, l'approximation utilisant la condition de contact en moyenne locale est non-conforme, on sera donc confronté à deux termes d'erreur, l'erreur d'approximation et l'erreur de consistance.

Remarque 2.2. Cette remarque apporte des éléments de réponse à la question : “Pourquoi définir cette méthode?”. Dans le cas particulier des maillages compatibles, la méthode proposée se résume à

$$\int_{I^m} [v_N^h] d\Gamma \leq 0, \forall I^m \in I^M.$$

En fait, cette condition a déjà été étudiée dans le cas $d = 2$ et $k = 2$ dans le cas du contact avec un socle rigide, dans le chapitre précédent. Cependant dans les cas linéaire bidimensionnel, et dans les cas linéaire et quadratique tridimensionnels (excepté le cas maillé en hexaèdres à 27 nœuds), la condition de contact à la base de la méthode LAC diffère des conditions de non-interpénétration usuelles :

$$[v_N^h] \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C, \quad (2.9)$$

et

$$\int_{T \cap \Gamma_C} [v_N^h] d\Gamma \leq 0 \text{ pour tous éléments de contact } T \cap \Gamma_C. \quad (2.10)$$

La question à laquelle l'on doit répondre est donc : pourquoi cette méthode dans le cas particulier des maillages compatibles ne se réduit-elle pas systématiquement à l'une des conditions de contact classiques étudiées dans le chapitre précédent ?

La première condition (2.9) dans le cas des maillages compatibles $[v_N^h] = v_{1_N}^h + v_{2_N}^h \leq 0$ sur Γ_C peut être étendue de manières multiples au cas général des maillages incompatibles. On sait que garder une approche symétrique ne mène à aucune analyse de convergence concluante dans ce cas général. En fait, les discrétisations symétriques ne sont pas adaptées aux outils de démonstration dont on dispose actuellement. Une des manières possibles pour imposer la symétrie est d'utiliser des méthodes mixtes stabilisées (voir [47]). Mais dans ce cas de figure, la condition de contact n'est plus donnée de manière explicite sur la zone de contact.

Néanmoins, les extensions non-symétriques du type $v_{1_N}^h + \mathcal{O}_1^h(v_{2_N}^h) \leq 0$ sur Γ_C où \mathcal{O}_1^h est un opérateur à valeurs dans W_1^h (l'espace de traces normales de V_1^h sur Γ_C) permet de générer les deux familles d'approche les plus connues pour gérer l'incompatibilité de maillages dans

le cadre du contact : si \mathcal{O}_1^h est l'opérateur d'interpolation de Lagrange, alors la méthode est locale (on est alors en présence des méthodes de type nœud-segment en 2D et nœud-facette en 3D qui sont connues pour être sous optimales dans notre cadre général d'étude). Si \mathcal{O}_1^h est un opérateur de projection $L^2(\Gamma_C)$, alors on est en présence d'une méthode de type "mortar". Ce type de méthode est global et possède des taux de convergence optimaux. Sachant que nous cherchons une méthode simple pour pouvoir réaliser l'implémentation numérique le plus facilement possible, les méthodes "mortar" modifiées et performantes comme la méthode "dual mortar" (voir [50, 54, 64, 82]) ne sont pas une solution dans notre cas. Actuellement, ces méthodes sont soit non-locales soit trop complexes pour être implémentées de manière générique et simple dans un code de calcul par éléments finis industriel. Malheureusement, nous n'avons pas trouvé un troisième opérateur menant à la fois à une méthode locale et à une analyse de convergence optimale.

On considère maintenant la seconde condition de contact (2.10) dont l'extension la plus évidente au cas des maillages incompatibles serait

$$\int_{T_\ell \cap \Gamma_C} [v_N^h] d\Gamma \leq 0 \text{ sur tout élément de contact } T_\ell \cap \Gamma_C$$

où l'on doit choisir $\ell = 1$ ou $\ell = 2$. Si l'on adopte cette définition quand $k = 1$ et $d = 2$ ou $d = 3$, alors on ne peut pas réaliser l'analyse de convergence (contrairement au cas $k = 2$ et $d = 2$ et au cas maillé en hexaèdres à 27 nœuds) ; en particulier, on ne peut pas définir de candidat pour majorer de manière optimale l'erreur d'approximation. En fait, on ne peut pas définir d'opérateur à valeurs dans W_1^h conservant la moyenne sur chaque élément de contact. Mais si on élargit un peu le support d'intégration, en particulier si l'on choisit un macro-maillage possédant un degré de liberté interne dans chaque macro-élément alors on peut mener à bien l'analyse de convergence tout en conservant le caractère local de la méthode. La méthode LAC a été définie pour traiter le contact en maillage incompatible en utilisant cette approche, c'est pourquoi elle ne s'apparente pas en général (dans le cas particulier des maillages compatibles) aux méthodes usuelles de gestion du contact.

2.2.1 Un opérateur conservant la moyenne sur les macro-maillages

Avant de s'attaquer à l'analyse d'erreur, nous allons définir un opérateur, noté π_1^h . Cet opérateur nous permettra de construire le candidat pour majorer de manière optimale l'erreur d'approximation. On commence par fixer $k = 1$, le cas $k = 2$ sera traité de manière triviale ensuite. On va montrer que cet opérateur préserve la moyenne sur tout macro-segment I^m , qu'il est $H^s(\Gamma_C)$ stable pour $s \in [0, 1]$ et satisfait d'autres propriétés utiles.

Soit W_1^h l'espace de traces normales de V_1^h sur Γ_C . On désigne par x_i , $i = 1, \dots, n$ les nœuds de la triangulation T_1^h situés sur $\overline{\Gamma_C}$ et par ϕ_i les fonctions de base de W_1^h correspondantes. Le support de ϕ_i (dans $\overline{\Gamma_C}$) est noté Δ_i . On suppose aussi que le maillage trace $T_1^h \cap \Gamma_C$ est quasi-uniforme (bien qu'il existe des hypothèses moins restrictives, voir [24]). On note respectivement h_C , h_i et h_{I^m} la plus grande longueur d'élément de Γ_C , la longueur du segment Δ_i et la longueur du segment I^m . On note C une constante positive ne dépendant ni de la taille du maillage ni de la fonction v .

Définition 2.1. Supposons que $\overline{\Gamma_C} \cap \overline{\Gamma_D^1} = \emptyset$.

1. On suppose que $n = 2p + 1$. Soit $I^M = \{[x_1, x_3], [x_3, x_5], \dots, [x_{n-2}, x_n]\}$. L'opérateur

$$\pi_1^h : L^1(\Gamma_C) \longrightarrow W_1^h$$

est défini de la manière suivante : pour tout $v \in L^1(\Gamma_C)$, $\pi_1^h v$ est défini localement sur $I^m = [x_i, x_{i+2}] \in I^M$ par

$$\pi_1^h v = \sum_{j=i}^{i+2} \alpha_j(v) \phi_j,$$

où

$$\begin{cases} \alpha_j(v) = \frac{\int_{\Delta_j} v \, d\Gamma}{|\Delta_j|}, j = i, i+2, \\ \alpha_{i+1}(v) = \frac{\int_{I^m} v \, d\Gamma - \int_{I^m} \alpha_i(v) \phi_i \, d\Gamma - \int_{I^m} \alpha_{i+2}(v) \phi_{i+2} \, d\Gamma}{\int_{I^m} \phi_{i+1} \, d\Gamma}. \end{cases} \quad (2.11)$$

2. On suppose que $n = 2p$. Soit $I^M = \{[x_1, x_3], [x_3, x_5], \dots, [x_{n-5}, x_{n-3}], [x_{n-3}, x_n]\}$. La définition de $\pi_1^h v$ sur tous macro-segments I^m est la même que (2.11) sauf pour $I^m = [x_{n-3}, x_n]$ où

$$\pi_1^h v = \sum_{j=n-3}^n \alpha_j(v) \phi_j,$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_j(v) = \frac{\int_{\Delta_j} v \, d\Gamma}{|\Delta_j|}, j = n-3, n-2, n, \\ \alpha_{n-1}(v) = \frac{\int_{I^m} v \, d\Gamma - \int_{I^m} \alpha_{n-3}(v) \phi_{n-3} \, d\Gamma - \int_{I^m} \alpha_{n-2}(v) \phi_{n-2} \, d\Gamma - \int_{I^m} \alpha_n(v) \phi_n \, d\Gamma}{\int_{I^m} \phi_{n-1} \, d\Gamma}. \end{cases}$$

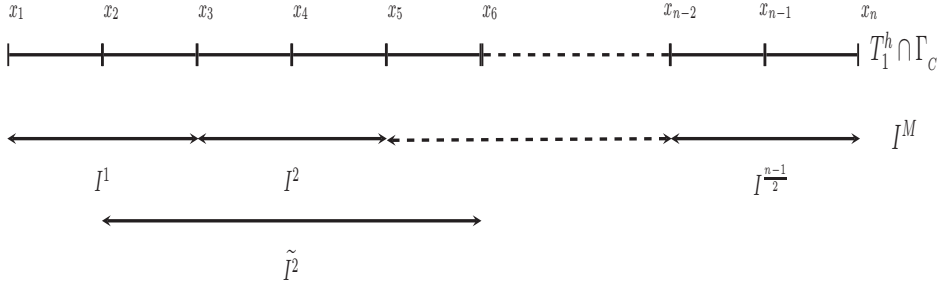


FIGURE 2.2 – Un maillage trace $T_1^h \cap \Gamma_C$ et le macro-maillage I^M associé.

Remarque 2.3. Si $\overline{\Gamma_C} \cap \overline{\Gamma_D^1} \neq \emptyset$, la définition de I^M est la même que précédemment. La seule différence (avec le cas précédent) est la définition de $\pi_1^h v$ au niveau de la condition limite de Dirichlet sur les nœuds du bord x_1 (et/ou x_n). Dans ce cas, il nous suffit de définir $\alpha_1(v) = 0$ (et/ou $\alpha_n(v) = 0$) de tel sorte que π_1^h préserve les conditions aux limites (i.e., $\pi_1^h v(x_1) = 0$ et/ou $\pi_1^h v(x_n) = 0$).

Proposition 2.1. *L'opérateur π_1^h est linéaire et satisfait*

$$\int_{I^m} \pi_1^h v - v \, d\Gamma = 0, \quad \forall v \in L^1(\Gamma_C), \quad \forall I^m \in I^M.$$

Démonstration. La linéarité de π_1^h est évidente, et la propriété de préservation de la moyenne sur I^m vient directement de la définition de π_1^h . \square

Proposition 2.2. *Soit $\overline{\Gamma_C} \cap \overline{\Gamma_D} = \emptyset$. Pour tout $s \in [0, 1]$, l'opérateur π_1^h est $H^s(\Gamma_C)$ stable, i.e., il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in H^s(\Gamma_C)$*

$$\|\pi_1^h v\|_{s, \Gamma_C} \leq C \|v\|_{s, \Gamma_C}.$$

Démonstration. Tout d'abord on montre que pour $v \in L^2(\Gamma_C)$:

$$|\alpha_i(v)| \leq C h_c^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{0, \tilde{I}^m}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (2.12)$$

où \tilde{I}^m est le patch entourant I^m : $\tilde{I}^m = \bigcup_{i: x_i \in I^m} \Delta_i$ (voir Figure 2.2). Soit $x_j \in I^m$, on a soit

$$|\alpha_j(v)| = \left| \int_{\Delta_j} v \, d\Gamma \right| |\Delta_j|^{-1} \leq h_j^{-1} \int_{\Delta_j} |v| \, d\Gamma \leq h_j^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{0, \Delta_j} \leq C h_c^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{0, \tilde{I}^m} \quad (2.13)$$

soit

$$\begin{aligned} |\alpha_j(v)| &= \left| \int_{I^m} v \, d\Gamma - \sum_{k \neq j: x_k \in I^m} \int_{I^m} \alpha_k(v) \phi_k \, d\Gamma \right| \left| \int_{I^m} \phi_j \, d\Gamma \right|^{-1} \\ &\leq C h_{I^m}^{-1} \left(h_{I^m}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0, I^m} + h_c^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0, \tilde{I}^m} + h_c^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0, \tilde{I}^m} \right) \\ &\leq C h_c^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{0, \tilde{I}^m}, \end{aligned}$$

où l'on utilise (2.13) conjointement avec $|\phi_i| \leq 1$ sur Γ_C et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ensuite, on démontre la stabilité L^2 locale (sur Γ_C) de π_1^h .

$$\begin{aligned} \|\pi_1^h v\|_{0, I^m} &= \left\| \sum_{j: x_j \in I^m} \alpha_j(v) \phi_j \right\|_{0, I^m} \leq \sum_{j: x_j \in I^m} |\alpha_j(v)| \|\phi_j\|_{0, I^m} \leq C h_{I^m}^{\frac{1}{2}} \sum_{j: x_j \in I^m} |\alpha_j(v)| \\ &\leq C \|v\|_{0, \tilde{I}^m}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Par sommation, on déduit de (2.14) :

$$\|\pi_1^h v\|_{0, \Gamma_C}^2 = \sum_{I^m \in I^M} \|\pi_1^h v\|_{0, I^m}^2 \leq C \sum_{I^m \in I^M} \|v\|_{0, \tilde{I}^m}^2 \leq C \|v\|_{0, \Gamma_C}^2, \quad (2.15)$$

ce qui démontre la stabilité $L^2(\Gamma_C)$ de π_1^h .

On démontre maintenant la stabilité $H^1(\Gamma_C)$ de π_1^h . On suppose que $v \in H^1(\Gamma_C)$ et on montre que

$$\|(\pi_1^h v)'\|_{0, \Gamma_C} \leq C \|v'\|_{0, \Gamma_C},$$

où la notation v' désigne la dérivée de v . On remarque que

$$(\pi_1^h a)|_{I^m} = a|_{I^m}, \quad \forall a \in P^0(\tilde{I}^m), \quad \forall I^m \in I^M.$$

En utilisant la définition de $\|(\pi_1^h v)'\|_{0, I^m}$, une inégalité inverse et la stabilité $L^2(I^m)$ locale (2.14) de π_1^h on obtient, pour tout $I^m \in I^M$ et tout $a \in P^0(\tilde{I}^m)$:

$$\|(\pi_1^h v)'\|_{0, I^m} = \|(\pi_1^h(v - a))'\|_{0, I^m} \leq C h_{I^m}^{-1} \|\pi_1^h(v - a)\|_{0, I^m} \leq C h_{I^m}^{-1} \|v - a\|_{0, \tilde{I}^m}.$$

On pose

$$a = |\tilde{I}^m|^{-1} \int_{\tilde{I}^m} v \, d\Gamma.$$

En utilisant l'inégalité standard

$$\|v - a\|_{0,\tilde{I}^m} \leq Ch_{\tilde{I}^m} \|v'\|_{0,\tilde{I}^m} \quad (2.16)$$

on déduit que

$$\|(\pi_1^h v)'\|_{0,I^m} \leq C \|v'\|_{0,\tilde{I}^m},$$

et par sommation

$$\|(\pi_1^h v)'\|_{0,\Gamma_C} \leq C \|v'\|_{0,\Gamma_C}. \quad (2.17)$$

Grâce à (2.15) et (2.17), on obtient

$$\|\pi_1^h v\|_{1,\Gamma_C}^2 = \|\pi_1^h v\|_{0,\Gamma_C}^2 + \|(\pi_1^h v)'\|_{0,\Gamma_C}^2 \leq C(\|v\|_{0,\Gamma_C}^2 + \|v'\|_{0,\Gamma_C}^2) = C\|v\|_{1,\Gamma_C}^2. \quad (2.18)$$

En utilisant la dernière estimation conjointement avec (2.15) et un argument d'interpolation hilbertienne (voir [59, 79]), on démontre la stabilité $H^s(\Gamma_C)$ de π_1^h pour tout $s \in (0, 1)$. \square

Remarque 2.4. Si $\overline{\Gamma_C} \cap \overline{\Gamma_D^1} \neq \emptyset$, on peut étendre facilement le résultat précédent. Bien sûr, les estimations (2.12), (2.14) et (2.15) sont toujours vérifiées. Tout d'abord, on suppose que $\overline{\Gamma_C} \cap \overline{\Gamma_N^1} = \emptyset$ (donc $\alpha_1(v) = \alpha_n(v) = 0$). Dans ce cas, on doit montrer que $\|(\pi_1^h v)'\|_{0,\Gamma_C} \leq C \|v'\|_{0,\Gamma_C}$ pour $v \in H_0^1(\Gamma_C)$. Il reste donc uniquement à montrer l'estimation locale $\|(\pi_1^h v)'\|_{0,I^m} \leq C \|v'\|_{0,\tilde{I}^m}$ pour les deux segments extrêmes I^m contenant x_1 et x_n (ici π_1^h ne préserve pas la constante sur les segments extrêmes). Étant donné que v s'annule sur \tilde{I}^m , on peut écrire

$$\|(\pi_1^h v)'\|_{0,I^m} \leq Ch_{I^m}^{-1} \|\pi_1^h v\|_{0,I^m} \leq Ch_{I^m}^{-1} \|v\|_{0,\tilde{I}^m} \leq C \|v'\|_{0,\tilde{I}^m}.$$

Cette inégalité nous permet d'obtenir l'estimation (2.17) et donc (2.18) pour tout $v \in H_0^1(\Gamma_C)$. On obtient alors facilement le résultat de stabilité pour tout espace d'interpolation entre $L^2(\Gamma_C)$ et $H_0^1(\Gamma_C)$. Le cas où seulement une des extrémités de Γ_C est soumise à une condition de Dirichlet est traité de manière similaire.

L'extension au cas quadratique ($k = 2$) est triviale. En effet, le macro-maillage dans ce cas se réduit simplement au maillage trace et π_1^h est défini sur chaque segment quadratique $I^m = [x_i, x_{i+2}]$ comme dans la Définition 2.1 dans laquelle le nœud milieu x_{i+1} nous permet de conserver la moyenne sur le segment. Il est alors facile de montrer que les Propositions 2.1, 2.2 et Remarques 2.3 et 2.4 sont encore vérifiées.

Remarque 2.5. L'opérateur π_1^h ne préserve pas les fonctions de W_1^h : si $v^h \in W_1^h$ alors $\pi_1^h v^h \neq v^h$ en général. Par conséquent, π_1^h n'est pas un opérateur de projection. De plus, il est facile de vérifier que π_1^h ne préserve pas le signe. Cependant on remarque que cet opérateur possède des similitudes avec celui étudié dans [18] (bien que π_1^h préserve la moyenne alors que l'opérateur dans [18] préserve les fonctions affines).

2.2.2 Analyse d'erreur dans le cas bidimensionnel

Le théorème à venir montre que l'approche "Local Average Contact" (*i.e.*, la condition de contact discrète décrite dans K^h) donne des taux de convergence optimaux dans le cas du contact unilatéral entre deux objets élastiques avec (ou sans) maillages incompatibles sur la zone de contact Γ_C . On désigne par $u = (u_1, u_2)$ avec $u_\ell = u|_{\Omega_\ell}$ le champ de déplacement, on pose $\|u\|_{s,\Omega^1,\Omega^2}^2 = \|u_1\|_{s,\Omega^1}^2 + \|u_2\|_{s,\Omega^2}^2$. On désigne par h_1 et h_2 la longueur maximum des éléments de T_1^h et T_2^h .

Théorème 2.1. *Soient u et u^h les solutions des Problèmes (2.7) et (2.8) respectivement. On suppose que $u \in (H^\tau(\Omega^1))^2 \times (H^\tau(\Omega^2))^2$ avec $3/2 < \tau \leq \min(k+1, 5/2)$, $k = 1, 2$. Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h_1, h_2 et u telle que*

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2} \leq C(h_1^{\tau-1} + h_2^{\tau-1})\|u\|_{\tau,\Omega^1,\Omega^2}. \quad (2.19)$$

Remarque 2.6. On rappelle qu'il est possible d'obtenir les même taux de convergence sous les mêmes hypothèses pour les méthodes de type "mortar" dans le cas du contact bidimensionnel entre deux objets élastiques en considérant des maillages incompatibles. Pour ce faire, il suffit d'utiliser les techniques de preuve introduites dans le chapitre précédent.

Démonstration. Le lemme de Falk dans le cas $K^h \not\subset K$ nous donne (voir, [29]) :

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2}^2 &\leq \inf_{v^h \in K^h} \left(\|u - v^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2}^2 + \int_{\Gamma_C} \sigma_N [v_N^h - u_N] d\Gamma \right) \\ &\quad + \inf_{v \in K} \int_{\Gamma_C} \sigma_N [v_N - u_N^h] d\Gamma \end{aligned} \quad (2.20)$$

avec $\alpha > 0$. Premièrement, on va montrer que l'erreur d'approximation, *i.e.*, le premier infimum dans (2.20) est majoré de manière optimale. On prend $v^h \in V^h$ défini comme suit

$$\begin{aligned} v_1^h &= I_1^h u_1 + R_1^h(\pi_1^h([u_N]) - I_1^h u_{1,n_1} - I_2^h u_{2,n_2}), \\ v_2^h &= I_2^h u_2, \end{aligned}$$

où I_ℓ^h est l'opérateur d'interpolation de Lagrange à valeurs dans V_ℓ^h , $\pi_1^h : L^1(\Gamma_C) \rightarrow W_1^h$ est l'opérateur défini dans la section précédente et R_1^h est un relèvement discret de W_1^h dans V_1^h . On peut obtenir un tel opérateur de relèvement en combinant un opérateur de relèvement continue standard avec un opérateur de régularisation (voir, [70, 13]). On commence par vérifier que v^h appartient à K^h . Soit $I^m \in I^M$

$$\begin{aligned} \int_{I^m} [v_N^h] d\Gamma &= \int_{I^m} v_1^h \cdot n_1 + v_2^h \cdot n_2 d\Gamma \\ &= \int_{I^m} I_1^h u_{1,n_1} - \pi_1^h(I_1^h u_{1,n_1}) d\Gamma + \int_{I^m} I_2^h u_{2,n_2} - \pi_1^h(I_2^h u_{2,n_2}) d\Gamma \\ &\quad + \int_{I^m} \pi_1^h[u_N] d\Gamma \\ &= \int_{I^m} \pi_1^h[u_N] d\Gamma \\ &= \int_{I^m} [u_N] d\Gamma \leq 0, \end{aligned}$$

on a donc bien $v^h \in K^h$.

Alors, grâce à la stabilité $H^{1/2}(\Gamma_C)$ de π_1^h (voir Proposition 2.2), au théorème de trace, et aux estimations d'erreur standard d'interpolation de Lagrange, le terme sous forme de norme dans le premier infimum est majoré de manière optimale :

$$\begin{aligned}
& \|u - v^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2} \\
& \leq \|u_1 - I_1^h u_1\|_{1,\Omega^1} + \|u_2 - I_2^h u_2\|_{1,\Omega^2} + \|R_1^h(\pi_1^h([u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2))\|_{1,\Omega^1} \\
& \leq \|u_1 - I_1^h u_1\|_{1,\Omega^1} + \|u_2 - I_2^h u_2\|_{1,\Omega^2} + C\|\pi_1^h([u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2)\|_{1/2,\Gamma_C} \\
& \leq \|u_1 - I_1^h u_1\|_{1,\Omega^1} + \|u_2 - I_2^h u_2\|_{1,\Omega^2} + C\|[u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2\|_{1/2,\Gamma_C} \\
& \leq C(\|u_1 - I_1^h u_1\|_{1,\Omega^1} + \|u_2 - I_2^h u_2\|_{1,\Omega^2}) \\
& \leq C(h_1^{\tau-1} + h_2^{\tau-1})\|u\|_{\tau,\Omega^1,\Omega^2}, \quad 3/2 < \tau \leq k+1.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Pour pouvoir traiter le terme intégral de l'erreur d'approximation, on va introduire l'espace X_1^h des fonctions constantes par morceaux sur le macro-maillage I^M :

$$X_1^h = \left\{ \chi^h \in L^2(\Gamma_C) : \chi^h|_{I^m} \in P^0(I^m), \forall I^m \in I^M \right\},$$

et l'opérateur de projection L^2 usuel $\bar{\pi}_1^h : L^2(\Gamma_C) \rightarrow X_1^h$ défini pour tout $\varphi \in L^2(\Gamma_C)$ par

$$\int_{\Gamma_C} (\varphi - \bar{\pi}_1^h \varphi) \chi^h \, d\Gamma = 0, \quad \forall \chi^h \in X_1^h.$$

Cet opérateur $\bar{\pi}_1^h$ satisfait les estimations standard suivantes pour tout $0 < r < 1$ et tout $\varphi \in H^r(\Gamma_C)$ (voir [6]) :

$$\|\varphi - \bar{\pi}_1^h \varphi\|_{0,\Gamma_C} + h_c^{-1/2} \|\varphi - \bar{\pi}_1^h \varphi\|_{1/2,*,\Gamma_C} \leq Ch_c^r |\varphi|_{r,\Gamma_C}, \tag{2.22}$$

où $\|\cdot\|_{1/2,*,\Gamma_C}$ représente la norme duale de $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_C}$ et h_c est la longueur maximale des segments du maillage trace sur Γ_C . Quand $r = 0$ (respectivement $r = 1$) les estimations précédentes restent vérifiées en changeant $|\varphi|_{r,\cdot}$ par $\|\varphi\|_{0,\cdot}$ (respectivement $\|\varphi'\|_{0,\cdot}$).

Étant donné que pour tout $I^m \in I^M$

$$\int_{I^m} ([u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2) - \pi_1^h([u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2) \, d\Gamma = 0,$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_C} \sigma_N ([v_N^h] - [u_N]) \, d\Gamma \\
& = - \int_{\Gamma_C} \sigma_N ([u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2 - \pi_1^h([u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2)) \, d\Gamma \\
& = - \int_{\Gamma_C} (\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N) ([u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2 - \pi_1^h([u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2)) \, d\Gamma.
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la stabilité $L^2(\Gamma_C)$ de π_1^h , le théorème de trace, les estimations d'erreur d'interpolation de Lagrange et une inégalité de Young on arrive à :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_C} \sigma_N ([v_N^h] - [u_N]) \, d\Gamma \\
& \leq \|\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N\|_{0,\Gamma_C} \|[u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2 - \pi_1^h([u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2)\|_{0,\Gamma_C} \\
& \leq C\|\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N\|_{0,\Gamma_C} \|[u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2\|_{0,\Gamma_C} \\
& \leq Ch_1^{\tau-3/2} |\sigma_N|_{\tau-3/2,\Gamma_C} (h_1^{\tau-1/2} + h_2^{\tau-1/2}) \|u\|_{\tau,\Omega^1,\Omega^2} \\
& \leq C(h_1^{2(\tau-1)} + h_2^{2(\tau-1)}) \|u\|_{\tau,\Omega^1,\Omega^2}^2, \quad 3/2 < \tau \leq 5/2.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Pour conclure, on doit majorer de manière optimale l'erreur de consistance, le second infimum dans (2.20). On prend alors $v = 0$. La preuve est technique et suit exactement celle de l'erreur de consistance des Théorèmes 1.1 et 1.2. On va donc simplement résumer le schéma de preuve en quelques lignes. Sachant que $\bar{\pi}_1^h \sigma_N$ est une fonction constante négative sur Γ_C , il vient que :

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_C} \sigma_N [u_N^h] d\Gamma &\leq - \int_{\Gamma_C} (\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N) [u_N^h] d\Gamma \\ &= - \int_{\Gamma_C} (\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N) ([u_N^h] - [u_N]) d\Gamma - \int_{\Gamma_C} (\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N) [u_N] d\Gamma \end{aligned} \quad (2.24)$$

le premier terme dans (2.24) est majoré de manière optimale en utilisant (2.22), le théorème de trace et l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_C} (\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N) ([u_N^h] - [u_N]) d\Gamma &\leq \|\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N\|_{1/2, *, \Gamma_C} \| [u_N^h] - [u_N] \|_{1/2, \Gamma_C} \\ &\leq Ch_1^{2(\tau-1)} \|u\|_{\tau, \Omega^1, \Omega^2}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u - u^h\|_{1, \Omega_1, \Omega_2}^2, \\ &\quad 3/2 < \tau \leq 5/2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Le second terme dans (2.24) est majoré sur tout macro-éléments $I^m \in I^M$. Comme précédemment Z_C et Z_{NC} désignent les zones de contact et de non-contact effectives dans I^m respectivement, *i.e.*, $Z_C = \{x \in I^m, [u_N](x) = 0\}$, et $Z_{NC} = \{x \in I^m, [u_N](x) < 0\}$, et $|Z_C|$, $|Z_{NC}|$ représentent leurs mesures dans \mathbb{R} (on a donc $|Z_C| + |Z_{NC}| = h_{I^m}$). Quand $|Z_C| > 0$ et $|Z_{NC}| > 0$ (autrement le terme intégral disparaît) on obtient (voir Chapitre 1 et [27]) :

$$- \int_{I^m} (\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N) [u_N] d\Gamma \leq Ch_{I^m}^{2\tau-3/2} \frac{(|\sigma_N|_{\tau-3/2, I^m}^2 + |[u_N]']_{\tau-3/2, I^m}^2)}{\max(|Z_{NC}|^{1/2}, |Z_C|^{1/2})}.$$

En remarquant que soit $|Z_{NC}|$ ou $|Z_C|$ est plus grand que $h_{I^m}/2$, en sommant sur tous les macro-éléments I^m , et en utilisant le théorème de trace, on arrive à la conclusion que :

$$- \int_{\Gamma_C} (\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N) [u_N] d\Gamma \leq Ch_1^{2(\tau-1)} \|u\|_{\tau, \Omega^1, \Omega^2}^2, \quad 3/2 < \tau \leq 5/2. \quad (2.26)$$

En combinant dans (2.20) les estimations sur l'erreur d'approximation (2.21), (2.23) avec celles sur l'erreur de consistance (2.25), (2.26) on obtient une estimation d'erreur globale optimale (2.19). \square

2.3 La méthode LAC dans le cas tridimensionnel ($d = 3$)

Dans cette section, on étend l'approche LAC au cas tridimensionnel. On considère deux domaines polyédriques Ω^1 et Ω^2 admettant une zone candidate au contact commune Γ_C , qui est un polygone. On note par \mathcal{T}_ℓ^h une famille régulière de tétraèdres ou hexaèdres discrétisant le domaine Ω^ℓ et par h_ℓ le diamètre maximum des éléments du maillage. Par la suite, on considérera des tétraèdres linéaires à 4 nœuds (TETRA 4), quadratiques à 10 nœuds (TETRA 10), des hexaèdres linéaires à 8 nœuds (HEXA 8), quadratiques à 20 et 27 nœuds (HEXA 20 et HEXA 27).

Pour pouvoir réaliser l'analyse d'erreur, on doit étendre la définition de l'opérateur π_1^h (voir Definition 2.1) au cas tridimensionnel. On doit aussi s'assurer que les propriétés principales de cet opérateur π_1^h (linéarité, conservation de la moyenne, stabilité $H^s(\Gamma_C)$) restent satisfaites dans ce cas de figure. Pour ce faire, on doit introduire une hypothèse, l'hypothèse du degré de liberté interne qui est nécessaire pour pouvoir construire π_1^h et mener à bien l'analyse de l'erreur d'approximation.

Hypothèse 2.1. (*DDL interne*) *Il existe un macro-maillage T^M de Γ_C dont les éléments sont des unions d'éléments de $\mathcal{T}_\ell^h \cap \Gamma_C$ tels que pour chaque macro-élément $T^m \in T^M$, il existe (au moins) un degré de liberté x_i de V_ℓ^h tel que $\text{supp}(\phi_i) \subset T^m$, où ϕ_i est la fonction de base associée à x_i . De plus il existe une constante C telle que le diamètre maximum du macro-maillage soit plus petit que Ch_ℓ (ce dernier point nous assure que le macro-maillage ne soit pas trop grossier).*

D'un point de vue théorique, on pourrait essayer de montrer que cette hypothèse sur le maillage peut être en général toujours satisfaite à partir d'un maillage quelconque, mais une telle stratégie est moins intéressante du point de vue numérique. On opte donc pour une autre approche consistant à raffiner localement le maillage de la zone de contact $\mathcal{T}_\ell^h \cap \Gamma_C$ de sorte que le maillage avant raffinement devienne le macro-maillage. Pour les hexaèdres à 27 nœuds, il n'y a pas besoin de raffiner la zone de contact étant donné que le maillage trace sur Γ_C répond déjà à l'hypothèse du degré de liberté interne. Pour les autres éléments, on présente une stratégie de raffinement local dans la Figure 2.3.

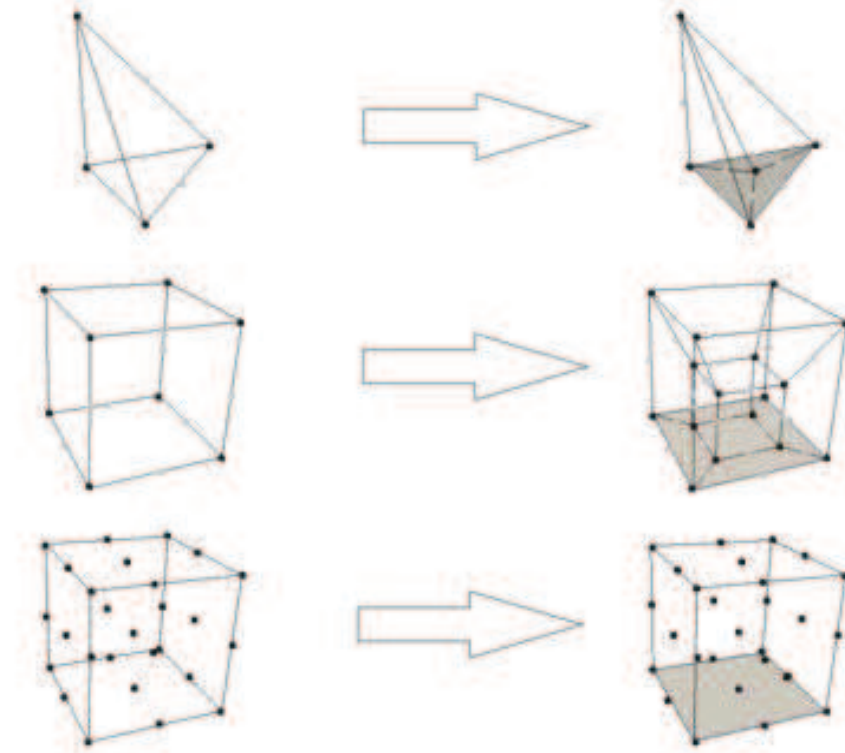


FIGURE 2.3 – Image supérieure : stratégie de raffinement pour les tétraèdres linéaire et quadratique (TETRA 4 et TETRA 10). Image centrale : stratégie de raffinement pour les hexaèdres linéaire et quadratique (HEXA 8 et HEXA 20). Image inférieure : définition du pseudo macro-élément pour le cas HEXA 27.

- Remarque 2.7.** 1. La stratégie de raffinement proposée est locale et concerne uniquement les éléments ayant une face sur la zone de contact potentielle (voir Figure 2.4 où un maillage en tétraèdres est raffiné).
2. On peut choisir d'appliquer le raffinement à l'un ou l'autre des objets.
3. Le raffinement n'affecte pas la régularité et la propriété de quasi-uniformité du maillage.

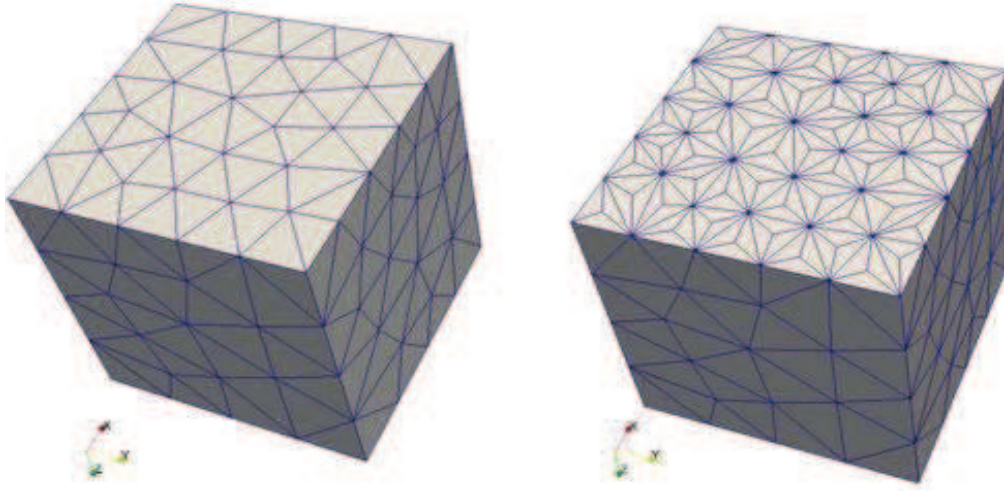


FIGURE 2.4 – Un exemple de raffinement sur la face $\vec{Ox}\vec{Oy}$ d'un cube : le maillage original à gauche et le maillage raffiné à droite.

2.3.1 Extension de l'opérateur π_1^h au cas tridimensionnel

Par la suite on suppose que T^M est un macro-maillage de Γ_C vérifiant l'Hypothèse 2.1 et construit à partir d'un maillage $\mathcal{T}_1^h \cap \Gamma_C$. Soit W_ℓ^h l'espace de traces normales de $V_\ell^h = \{v_\ell^h \in (C(\overline{\Omega}^\ell))^3 : v_\ell^h|_{\mathcal{T}} \in P^k(\mathcal{T}), \forall \mathcal{T} \in \mathcal{T}_\ell^h, v_\ell^h = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$ sur $\Gamma_C \subset \mathbb{R}^2$ avec $k = 1, 2$. Soit ϕ_i les fonctions de base associées aux degrés de liberté de W_1^h . On note $x_i, i = 1, \dots, n$ les nœuds correspondant dans $\mathcal{T}_1^h \cap \Gamma_C$ et $\Delta_i = \text{supp}(\phi_i)$.

Définition 2.2. On suppose que l'Hypothèse 2.1 est vérifiée. L'opérateur

$$\pi_1^h : L^1(\Gamma_C) \longrightarrow W_1^h$$

est défini comme suit pour tout $v \in L^1(\Gamma_C)$. Si x_i est un nœud de $\overline{\Gamma_C} \cap \overline{\Gamma_D^1}$, alors $\pi_1^h v(x_i) = 0$. Autrement, $\pi_1^h v$ est défini localement sur chaque macro-élément $T^m \in T^M$ ayant pour nœuds $x_i, i = 1, \dots, m$ ($x_i \notin \overline{\Gamma_C} \cap \overline{\Gamma_D^1}$) et pour DDL interne x_{m+1} de la manière suivante

$$\pi_1^h v = \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j(v) \phi_j,$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_j(v) = \frac{\int_{\Delta_j} v \, d\Gamma}{|\Delta_j|}, j = 1, \dots, m \\ \alpha_{m+1}(v) = \frac{\int_{T^m} v \, d\Gamma - \sum_{j=1}^m \int_{T^m} \alpha_j(v) \phi_j \, d\Gamma}{\int_{T^m} \phi_{m+1} \, d\Gamma}. \end{array} \right.$$

Remarque 2.8. 1. Si T^M contient plus d'un degré de liberté interne alors on fixe l'un d'eux, noté x_{m+1} et choisi tel que $\int_{T^m} \phi_{m+1} \, d\Gamma > 0$, et les autres sont traités comme des nœuds standard.

2. Si l'on adopte la procédure décrite dans la Figure 2.3 lorsque l'on considère des TETRA 4, TETRA 10, HEXA 8, HEXA 20, HEXA 27, on a respectivement $m = 3, m = 9, m = 7, m = 19, m = 8$.

Proposition 2.3. 1. L'opérateur π_1^h est linéaire et vérifie

$$\int_{T^m} \pi_1^h v - v \, d\Gamma = 0, \quad \forall v \in L^1(\Gamma_C), \quad \forall T^m \in T^M.$$

2. Pour tout $s \in [0, 1]$, l'opérateur π_1^h est $H^s(\Gamma_C)$ stable, i.e., il existe $C > 0$ telle que pour tout $v \in H^s(\Gamma_C)$

$$\|\pi_1^h v\|_{s, \Gamma_C} \leq C \|v\|_{s, \Gamma_C}.$$

Démonstration. Comme dans le cas bidimensionnel, la linéarité de π_1^h est évidente et la propriété de conservation de la moyenne sur T^m vient directement de la définition de π_1^h . Quand $\overline{\Gamma_C} \cap \overline{\Gamma_D^1} = \emptyset$, la preuve de stabilité suit le même schéma que dans le cas bidimensionnel. Il est facile de voir que pour tout j , on a

$$|\alpha_j(v)| \leq C |\Delta_j|^{-1/2} \|v\|_{0, \tilde{T}^m} \leq C h_c^{-1} \|v\|_{0, \tilde{T}^m} \quad (2.27)$$

où $\tilde{T}^m = \bigcup_{i: x_i \in T^m} \Delta_i$. Ainsi, on obtient la stabilité L^2 locale : $\|\pi_1^h v\|_{0, T^m} \leq C \|v\|_{0, \tilde{T}^m}$ puis la stabilité L^2 globale $\|\pi_1^h v\|_{0, \Gamma_C} \leq C \|v\|_{0, \Gamma_C}$. Comme dans le cas bidimensionnel, la stabilité L^2 locale du gradient :

$$\|\nabla \pi_1^h v\|_{0, T^m} \leq C \|\nabla v\|_{0, \tilde{T}^m} \quad (2.28)$$

est une conséquence directe de la propriété $\nabla \pi_1^h a = 0$ sur T^m pour tout $a \in P^0(\tilde{T}^m)$ et de l'estimation d'erreur (2.16) dans le cas 2D (voir [6]).

Quand $\overline{\Gamma_C} \cap \overline{\Gamma_D^1} \neq \emptyset$, l'inégalité (2.27) reste vérifiée pour tout j . Il est alors suffisant de montrer que (2.28) reste vraie quand T^m possède au moins un nœud dans $\overline{\Gamma_D^1}$ (dans ce cas les fonctions constantes ne sont pas préservées sur T^m). On a donc

$$\|\nabla \pi_1^h v\|_{0, T^m} \leq C h_c^{-1} \|\pi_1^h v\|_{0, T^m} \leq C h_c^{-1} \|v\|_{0, \tilde{T}^m} \leq C \|\nabla v\|_{0, \tilde{T}^m}$$

où la dernière majoration vient de l'inégalité de Poincaré et du fait que v s'annule sur un ensemble de mesure strictement positive sur $\partial \tilde{T}^m$. En notant par $H_{0, \Gamma_D^1}^1(\Gamma_C)$ les fonctions de $H^1(\Gamma_C)$ s'annulant sur $\overline{\Gamma_C} \cap \overline{\Gamma_D^1}$, on déduit que π_1^h est stable sur tous les espaces d'interpolation entre $L^2(\Gamma_C)$ et $H_{0, \Gamma_D^1}^1(\Gamma_C)$. \square

2.3.2 Analyse d'erreur dans le cas tridimensionnel

Le prochain résultat montre que l'utilisation de la condition de contact LAC dans le cas tridimensionnel (voir définition à venir) mène à des taux de convergence en norme H^1 optimaux. Comme précédemment, on pose $\|u\|_{s,\Omega^1,\Omega^2}^2 = \|u_1\|_{s,\Omega^1}^2 + \|u_2\|_{s,\Omega^2}^2$ où $u = (u_1, u_2)$ et $u_\ell = u|_{\Omega^\ell}$. On rappelle que $V^h = V_1^h \times V_2^h$ et on définit K^h comme suit :

$$K^h = \left\{ v^h \in V^h : \int_{T^m} [v_N^h] d\Gamma \leq 0 \quad \forall T^m \in T^M \right\}.$$

Soit u^h l'unique solution du problème tridimensionnel discret

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^h \in K^h \text{ vérifiant :} \\ a(u^h, v^h - u^h) \geq l(v^h - u^h), \quad \forall v^h \in K^h. \end{cases} \quad (2.29)$$

Théorème 2.2. *Soient u et u^h les solutions des Problèmes (2.7) et (2.29) respectivement. On suppose que l'Hypothèse 2.1 est vérifiée et que $u \in (H^\tau(\Omega^1))^3 \times (H^\tau(\Omega^2))^3$ avec $3/2 < \tau \leq \min(k+1, 5/2)$, $k = 1, 2$. Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h_1, h_2 et u telle que*

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2} \leq C(h_1^{\tau-1} + h_2^{\tau-1})\|u\|_{\tau,\Omega^1,\Omega^2}.$$

Remarque 2.9. Pour les approches de type “mortar standard”, il nous faudrait traiter le cas des nœuds extrêmes de Γ_C afin d'obtenir les mêmes de taux de convergence sous les mêmes types d'hypothèses sur u dans le cas des maillages incompatibles. En fait, les résultats introduits dans le Chapitre 1 ne peuvent pas être étendus de manière directe au cadre “mortar standard” tridimensionnel (contrairement au cas bidimensionnel).

Démonstration. A partir du Lemme de Falk, on obtient l'estimation d'erreur abstraite (2.20). Grâce aux propriétés de π_h^1 , on peut majorer de manière optimale l'erreur d'approximation de la même façon que dans la section précédente en prenant $v^h \in V^h$ tel que

$$\begin{aligned} v_1^h &= I_1^h u_1 + R_1^h(\pi_1^h([u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2)), \\ v_2^h &= I_2^h u_2. \end{aligned}$$

Comme dans le cas bidimensionnel, on peut facilement montrer que $v^h \in K^h$ et obtenir la majoration d'erreur, pour $3/2 < \tau \leq \min(k+1, 5/2)$, suivante :

$$\inf_{v^h \in K^h} \left(\|u - v^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2}^2 + \int_{\Gamma_C} \sigma_N [v_N^h - u_N] d\Gamma \right) \leq C(h_1^{2(\tau-1)} + h_2^{2(\tau-1)})\|u\|_{\tau,\Omega^1,\Omega^2}^2.$$

L'erreur de consistance est à nouveau traitée en suivant le même schéma de preuve que dans le Chapitre 1 (voir aussi [27]). On obtient pour $3/2 < \tau \leq 5/2$:

$$\inf_{v \in K} \int_{\Gamma_C} \sigma_N [v_N - u_N] d\Gamma \leq C h_1^{2(\tau-1)} \|u\|_{\tau,\Omega^1,\Omega^2}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u - u^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2}^2.$$

En combinant les deux estimations précédentes dans (2.20) on conclut la démonstration. \square

2.4 Conclusion

La méthode LAC possède donc des taux de convergence théoriques optimaux en 2D et 3D avec ou sans maillages incompatibles pour tous les éléments couramment utilisés dans les études industrielles à l'instar des méthodes de type "mortar". De plus, de par sa définition, la méthode proposée conserve un caractère local qui facilitera grandement l'implémentation dans un code de calcul par éléments finis industriel. Le principal prix à payer pour conserver cet aspect local de la méthode est une description du contact de type P^0 . Pour un maillage fixé, cette description peut-être moins fine que celle obtenue par des approches plus standard de type P^1 . Cependant le gain en terme de qualité des résultats attendus devrait compenser ce "défaut". On note que la nouvelle technique de preuve introduite dans le Chapitre 1 nous a permis de relaxer les hypothèses couramment utilisées pour mener à bien les analyses de convergence dans le cas des méthodes de type "mortar". En effet, on utilise uniquement la régularité Sobolev de la solution du problème continu en 2D ainsi qu'une hypothèse supplémentaire faible sur le maillage de calcul pour le cas 3D.

Chapitre 3

Étude théorique complémentaire

Dans ce dernier chapitre d'analyse théorique, on va démontrer plusieurs résultats utiles pour compléter l'analyse théorique de la méthode LAC et préparer l'expérimentation numérique. Dans un premier temps, on va introduire la formulation mixte équivalente utilisant un espace de multiplicateurs de Lagrange constants par morceaux sur le macro-maillage, $P^0(T^M)$. Ensuite, on démontre la stabilité (*i.e.*, validation de la condition inf-sup) de cette formulation de la méthode et on étend les taux de convergence optimaux à cette formulation. Cette étape est utile pour justifier des choix d'implémentation et de validation numérique de la méthode LAC. En effet, on souhaite s'inscrire dans le cadre algorithmique de gestion du contact déjà existant. Sachant que la méthode sur laquelle on va s'appuyer utilise une formulation mixte, il est nécessaire de disposer d'une telle formulation pour la méthode LAC. La deuxième section de ce chapitre concerne la validation des taux de convergence théoriques de la méthode. Étant donné qu'il nous sera plus facile de disposer numériquement des erreurs en norme L^2 , cette section propose une piste d'analyse, utilisant une hypothèse restrictive, qui permet d'obtenir les taux de convergence en norme L^2 à partir de ceux déjà démontrés pour la norme H^1 . Finalement, une dernière section sera consacrée au problème des macro-maillages semi-intersectés en contact.

3.1 La formulation mixte de la méthode LAC

Pour commencer, on va introduire la formulation mixte équivalente du problème sous forme d'inéquation variationnelle utilisant la condition de contact en moyenne locale. Ensuite, on va mettre en avant le lien existant entre la définition du macro-maillage de la zone de contact (en particulier l'Hypothèse 2.1) et les conditions inf-sup.

3.1.1 La formulation mixte équivalente du problème de contact unilatéral utilisant la condition contact en moyenne locale

On va démontrer l'équivalence entre la formulation inéquation variationnelle de la méthode (2.8) pour $d = 2$ (et (2.29) pour $d = 3$) utilisant la condition de contact en moyenne locale et une formulation mixte du problème de contact unilatéral utilisant un espace particulier de multiplicateurs de Lagrange constants par morceaux. On adopte les notations introduites lors de l'analyse tridimensionnelle de la méthode LAC, en particulier T^m, T^M .

Bien sûr, les résultats sont aussi valides dans le cas bidimensionnel en notant I^m, I^M pour le macro-maillage.

Définition 3.1. On rappelle que $V^h = V_1^h \times V_2^h$ où pour $d = 2, 3$ et $k = 1, 2$:

$$V_\ell^h = \left\{ v_\ell^h \in (C(\overline{\Omega}^\ell))^d : v_\ell^h|_{\mathcal{T}} \in P^k(\mathcal{T}), \forall \mathcal{T} \in \mathcal{T}_\ell^h, v_\ell^h = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\}.$$

On choisit un espace de multiplicateurs de Lagrange constants et négatifs par morceaux sur le macro-maillage T^M sur Γ_C , i.e., appartenant au cône convexe M^h :

$$M^h = \{ \mu^h \in X_1^h : \mu^h \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C \} \text{ où } X_1^h = \{ \mu^h \in L^2(\Gamma_C) : \mu^h|_{T^m} \in P^0(T^m), \forall T^m \in T^M \}.$$

On introduit aussi la forme bilinéaire b sur $X_1^h \times V^h$ définie par

$$b(\mu^h, v^h) = \int_{\Gamma_C} \mu^h [v_N^h] d\Gamma.$$

Proposition 3.1. On suppose que l'Hypothèse 2.1 est vérifiée. Le problème (2.29) (ou (2.8) pour $d = 2$) et le problème : trouver $u^h \in V^h$ et $\lambda^h \in M^h$ tels que

$$\begin{cases} a(u^h, v^h) - b(\lambda^h, v^h) = l(v^h), \quad \forall v^h \in V^h, \\ b(\mu^h - \lambda^h, u^h) \geq 0, \quad \forall \mu^h \in M^h, \end{cases} \quad (3.1)$$

sont bien posés et équivalents, i.e., la solution u^h de (2.29) (ou (2.8) pour $d = 2$) coïncide avec la première composante de la solution de (3.1).

Avant de se consacrer à la démonstration de l'équivalence entre les deux formulations de la méthode LAC, on va introduire un lemme technique utile pour cette dernière.

Lemme 3.1. On suppose que l'Hypothèse 2.1 est vérifiée. Soit μ^h appartenant à X_1^h . Alors l'implication suivante est satisfaite

$$\int_{\Gamma_C} \mu^h [v_N^h] d\Gamma = 0, \quad \forall v^h \in V^h \Rightarrow \mu^h = 0.$$

Démonstration. (Lemme 3.1) Soit $\mu^h \in X_1^h$. Il est suffisant de démontrer que pour tout $T^m \in T^M$

$$\mu^h|_{T^m} = 0. \quad (3.2)$$

Soit T^m appartenant à T^M . De l'Hypothèse 2.1, on déduit qu'il existe ϕ_i tel que $\text{supp}(\phi_i) \subset T^m$ et $\int_{T^m} \phi_i d\Gamma > 0$. Alors, on choisit v^h de sorte que $[v_N^h] = \phi_i$. Étant donné que μ^h appartient à X_1^h , on a

$$0 = \int_{\Gamma_C} \mu^h [v_N^h] d\Gamma = \int_{T^m} \mu^h \phi_i d\Gamma = \mu^h \int_{T^m} \phi_i d\Gamma.$$

On obtient donc bien (3.2) □

Démonstration. (Proposition 3.1) Tout d'abord, nous supposons que le Problème (3.1) est bien posé et nous démontrons l'équivalence entre (2.29) (ou (2.8) pour $d = 2$) et (3.1). Soit $(u^h, \lambda^h) \in V^h \times M^h$ la solution de (3.1). On a,

$$b(\mu^h - \lambda^h, u^h) \geq 0, \quad \forall \mu^h \in M^h.$$

En prenant $\mu^h = 0$ et $\mu^h = 2\lambda^h$ on arrive à :

$$b(\lambda^h, u^h) = 0, \quad (3.3)$$

$$b(\mu^h, u^h) \geq 0, \quad \forall \mu^h \in M^h. \quad (3.4)$$

En choisissant dans (3.4) $\mu^h = -1$ sur T^m et $\mu^h = 0$ sur le reste du macro-maillage, on arrive à la conclusion que $u^h \in K^h$. De (3.1) et (3.3), on déduit que

$$a(u^h, u^h) = l(u^h), \quad (3.5)$$

et pour tout $v^h \in K^h$, on a

$$a(u^h, v^h) - l(v^h) = b(\lambda^h, v^h) \geq 0. \quad (3.6)$$

En combinant $u^h \in K^h$, (3.5) et (3.6) on déduit que u^h est une solution du Problème (2.29). Étant donné que les Problèmes (2.29) et (3.1) sont bien posés, il sont alors équivalents.

Pour conclure, on montre que le Problème (3.1) est bien posé. L'existence de la solution $(u^h, \lambda^h) \in V^h \times M^h$ de (3.1) et l'unicité de u^h viennent des résultats standard déjà existants (voir [39]). Il nous reste donc à démontrer l'unicité du multiplicateur de Lagrange λ^h en utilisant le Lemme 3.1. Soient $(u^h, \lambda_1^h) \in V^h \times M^h$ et $(u^h, \lambda_2^h) \in V^h \times M^h$ deux solutions de (3.1). Il vient que

$$a(u^h, v^h) - b(\lambda_1^h, v^h) = l(v^h), \quad \forall v^h \in V^h, \quad (3.7)$$

$$a(u^h, v^h) - b(\lambda_2^h, v^h) = l(v^h), \quad \forall v^h \in V^h. \quad (3.8)$$

Par soustraction de (3.7) à (3.8), on obtient

$$\int_{\Gamma_C} (\lambda_1^h - \lambda_2^h) [v_N^h] d\Gamma = 0, \quad \forall v^h \in V^h.$$

Comme $\lambda_1^h - \lambda_2^h$ appartient à X_1^h , on déduit du Lemme 3.1 que $\lambda_1^h = \lambda_2^h$. On a donc bien unicité de λ^h et le Problème (3.1) est bien posé. \square

3.1.2 La condition inf-sup

On va maintenant montrer que satisfaire l'Hypothèse 2.1 permet d'assurer que la méthode mixte utilisant des multiplicateurs de Lagrange constants par morceaux sur le macro-maillage T^M (ou I^M en 2D) vérifie la condition inf-sup.

La condition inf-sup en jeu dans notre formulation est la suivante : il existe une constante β^h telle que

$$\inf_{\mu^h \in X_1^h} \sup_{v^h \in V^h} \frac{b(\mu^h, v^h)}{\|\mu^h\|_{W'} \|v^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2}} \geq \beta^h > 0,$$

où W est l'espace de traces normales de V_1 sur Γ_C et W' désigne son espace dual. Il est facile de vérifier que le Lemme 3.1 implique l'existence d'une telle constante β^h . De plus, on sait que cette condition inf-sup, à travers la constante β^h , entre en jeu dans l'analyse d'erreur de la formulation mixte (3.1). Pour pouvoir obtenir des taux de convergence optimaux, on doit montrer que β^h est indépendante de la taille du maillage $h = (h_1, h_2)$. On va mettre en évidence, dans la propriété à venir, le lien existant entre l'Hypothèse 2.1,

l'opérateur π_1^h et la condition inf-sup indépendante du maillage : il existe une constante β telle que :

$$\inf_{\mu^h \in X_1^h} \sup_{v^h \in V^h} \frac{b(\mu^h, v^h)}{\|\mu^h\|_{W'} \|v^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2}} \geq \beta > 0. \quad (3.9)$$

Proposition 3.2. *Il existe une constante positive β ne dépendant pas de la taille du maillage telle que : pour tout $\mu^h \in X_1^h$, il existe $v^h \in V^h$, $v^h \neq 0$ tel que*

$$b(\mu^h, v^h) \geq \beta \|\mu^h\|_{W'} \|v^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2}. \quad (3.10)$$

Démonstration. On commence par remarquer que (3.10) et (3.9) sont équivalentes. Soit μ^h appartenant à X_1^h . Étant donné que $X_1^h \subset W'$, on peut utiliser la condition inf-sup du problème continu (voir, [39]) : il existe une constante $\tilde{\beta}$ telle que

$$\inf_{\mu \in W'} \sup_{v \in V} \frac{b(\mu, v)}{\|\mu\|_{W'} \|v\|_{1,\Omega^1,\Omega^2}} \geq \tilde{\beta} > 0. \quad (3.11)$$

Donc, pour tout $\mu^h \in X_1^h$ il existe $v \in V$ tel que :

$$b(\mu^h, v) \geq \tilde{\beta} \|\mu^h\|_{W'} \|v\|_{1,\Omega^1,\Omega^2}.$$

Pour démontrer (3.10), il suffit alors de montrer qu'il existe $v^h \in V^h$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$b(\mu^h, v^h) = b(\mu^h, v), \quad (3.12)$$

$$\|v^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2} \leq C \|v\|_{1,\Omega^1,\Omega^2}. \quad (3.13)$$

En fait, si (3.12) et (3.13) sont vérifiées alors on obtient (3.10) avec $\beta = \tilde{\beta}/C$, *i.e.*,

$$b(\mu^h, v^h) = b(\mu^h, v) \geq \tilde{\beta} \|\mu^h\|_{W'} \|v\|_{1,\Omega^1,\Omega^2} \geq \frac{\tilde{\beta}}{C} \|\mu^h\|_{W'} \|v^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2}.$$

Pour montrer que (3.12) est satisfaite, on pose $v^h = (v_1^h, v_2^h)$ de sorte que

$$v_1^h = R_1^h \pi_1^h[v_N], \quad v_2^h = 0,$$

où R_1^h est un opérateur de relèvement discret. Comme π_1^h préserve la moyenne sur tout $T^m \in T^M$, v^h vérifie :

$$\int_{T^m} [v_N^h] d\Gamma = \int_{T^m} \pi_1^h[v_N] d\Gamma = \int_{T^m} [v_N] d\Gamma, \quad \forall T^m \in T^M.$$

Par sommation sur les macro-mailles et sachant que μ^h est constant sur tout macro-élément T^m , on obtient (3.12) :

$$b(\mu^h, v^h) = \int_{\Gamma_C} \mu^h [v_N^h] d\Gamma = \int_{\Gamma_C} \mu^h [v_N] d\Gamma = b(\mu^h, v).$$

Pour conclure la preuve, il reste à montrer que v^h vérifie (3.13). Grâce à la stabilité $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$ de π_1^h et au théorème de trace, on a

$$\|v^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2} = \|R_1^h \pi_1^h[v_N]\|_{1,\Omega^1} \leq C \|\pi_1^h[v_N]\|_{1/2,\Gamma_C} \leq C \|[v_N]\|_{1/2,\Gamma_C} \leq C \|v\|_{1,\Omega^1,\Omega^2}.$$

□

Remarque 3.1. On remarque donc que la recherche des conditions sur le maillage pour pouvoir construire le l'opérateur π_1^h est quelque peu similaire à la recherche d'un espace discret d'approximation satisfaisant la condition inf-sup. On peut voir ici des similitudes (dans le cas linéaire, $k = 1$) avec les approches à trois champs stabilisées introduites dans [16]. En effet, on peut considérer la méthode LAC comme voisine aux méthodes à deux champs issues des approches à trois champs de Brezzi et Marini comme la méthode "mortar discontinue stabilisée" (P^k/P^{k-1}) pour la décomposition de domaine, étudiée dans [40, 41] ou la méthode de décomposition de domaine stabilisée introduite dans [12], lorsque l'on considère leurs adaptations aux problèmes de contact. La différence principale réside dans le fait que l'approche LAC est automatiquement stable grâce à la définition du macro-maillage T^M (enrichissement avec une bulle "pointue") alors que les approches de type Brezzi Marini utilisent un enrichissement de type bulle sur l'un des espaces d'approximation V_ℓ^h pour satisfaire la condition inf-sup.

3.1.3 Estimation d'erreur H^1

Dans le théorème à venir, on montre que l'on peut obtenir les mêmes taux de convergence pour la solution du problème (3.1) que ceux annoncés dans les Théorèmes 2.1 et 2.2 concernant la formulation par inéquation variationnelle de la méthode LAC.

Théorème 3.1. *Soient $(u, \lambda = \sigma_N)$ et (u^h, λ^h) les solutions des Problèmes (2.7) et (3.1) respectivement. Soient $d = 2, 3$ et $k = 1, 2$. On suppose que l'Hypothèse 2.1 est vérifiée quand $d = 3$ et que $u \in (H^\tau(\Omega^1))^d \times (H^\tau(\Omega^2))^d$ avec $3/2 < \tau \leq \min(k + 1, 5/2)$. Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de $h = (h_1, h_2)$ et u telle que*

$$\|\lambda - \lambda^h\|_{1/2, *, \Gamma_C} + \|u - u^h\|_{1, \Omega^1, \Omega^2} \leq C(h_1^{\tau-1} + h_2^{\tau-1})\|u\|_{\tau, \Omega^1, \Omega^2},$$

où $\|\cdot\|_{1/2, *, \Gamma_C}$ désigne la norme duale de $\|\cdot\|_{1/2, \Gamma_C}$.

Démonstration. La preuve est immédiate et standard. En effet, la condition inf-sup (3.9) étant vérifiée il suffit de majorer des termes similaires à ceux traités dans les démonstrations des Théorèmes 2.1 et 2.2 (voir [46]). \square

Corollaire 3.1. *Soient $(u, \lambda = \sigma_N)$ et (u^h, λ^h) les solutions des Problèmes (2.7) et (3.1) respectivement. On suppose que l'Hypothèse 2.1 est satisfaite. On suppose que $u \in (H^\tau(\Omega^1))^d \times (H^\tau(\Omega^2))^d$ avec $\tau = 2$ pour $k = 1$ et avec $2 \leq \tau \leq 5/2$ pour $k = 2$. Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et u telle que*

$$\|\lambda - \lambda^h\|_{L^2(\Gamma_C)} \leq Ch_1^{-1/2}(h_1^{\tau-1} + h_2^{\tau-1})\|u\|_{\tau, \Omega^1, \Omega^2}.$$

3.2 Recherche d'estimation d'erreur en norme L^2

Ici on va proposer une piste de démonstration permettant d'établir les taux de convergence théoriques en norme $L^2(\Omega^1 \cup \Omega^2)$ pour les déplacements issus de la méthode LAC. Cette étude est nécessaire étant donné qu'il nous sera plus facile d'accéder à l'erreur en norme L^2 lors de la validation numérique des taux de convergence théoriques. Cependant, ce problème reste ouvert complexe, voir [23, 72]. Le résultat présenté dans cette section est encore à un stade embryonnaire et mériterait d'être approfondi.

3.2.1 Le problème auxiliaire

En tout premier lieu, on doit introduire un problème auxiliaire. Soient $(u, \lambda = \sigma_N)$ et (u^h, λ^h) les solutions des Problèmes (2.7) et (3.1) respectivement. On considère la même configuration géométrique que celle introduite dans le Chapitre 2. Le problème auxiliaire consiste à trouver un champ $z = (z_1, z_2) : \Omega^1 \times \Omega^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, vérifiant (3.14)–(3.19) :

$$-\operatorname{div} \sigma_\ell(z_\ell) = (u - u^h)_\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell, \quad (3.14)$$

$$\sigma_\ell(z_\ell) = \mathcal{A}_\ell \varepsilon_\ell(z_\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell, \quad (3.15)$$

$$\sigma_\ell(z_\ell) \mathbf{n}_\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N^\ell, \quad (3.16)$$

$$z_\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D^\ell. \quad (3.17)$$

Sur Γ_C , on décompose le champ z et le champ vectoriel de contrainte selon la normale et la tangente de la manière suivante :

$$z_{\ell N} = z_\ell \cdot \mathbf{n}_\ell, \quad z_{\ell T} = z_\ell - z_{\ell N} \mathbf{n}_\ell,$$

$$\sigma_{z_{\ell N}} = (\sigma_\ell(z_\ell) \mathbf{n}_\ell) \cdot \mathbf{n}_\ell, \quad \sigma_{z_{\ell T}} = \sigma_\ell(z_\ell) \mathbf{n}_\ell - \sigma_{z_{\ell N}} \mathbf{n}_\ell,$$

et on note

$$[z_N] = z_{1N} + z_{2N},$$

le saut normal du champ z à travers la zone de contact.

La condition supplémentaire sur Γ_C est exprimée comme suit :

$$\int_{\Gamma_C} (\lambda^h - \lambda) [z_N] - \sigma_{z_{1N}} (u - u^h)_{1N} - \sigma_{z_{2N}} (u - u^h)_{2N} d\Gamma \leq 0. \quad (3.18)$$

On doit aussi respecter une condition de type non-frottement sur Γ_C qui se traduit, pour $\ell = 1, 2$, par :

$$\sigma_{\ell T} = 0. \quad (3.19)$$

Hypothèse 3.1. *Il existe une solution z du Problème (3.14)–(3.19) appartenant à $(H^2(\Omega^1))^d \times (H^2(\Omega^2))^d$ et satisfaisant,*

$$\|z\|_{2, \Omega^1, \Omega^2} \leq C \|u - u^h\|_{0, \Omega^1, \Omega^2} \quad (3.20)$$

où C ne dépend pas des données f_ℓ et F_ℓ introduites dans le Problème (2.7).

Remarque 3.2. On note que l'Hypothèse 3.1 est très forte et potentiellement abusive. Cependant, elle nous permet d'établir une méthodologie de preuve élémentaire et générale pour obtenir des estimations de convergence en norme L^2 . Une première piste pour aborder le problème plus rigoureusement serait d'établir une formulation variationnelle bien posée du Problème (3.14)–(3.19), quitte à le modifier légèrement mais en conservant la condition (3.18) sur Γ_C .

3.2.2 Analyse d'erreur

Proposition 3.3. *Soient $d = 2, 3$ et $(u, \lambda = \sigma_N)$ et (u^h, λ^h) les solutions des Problèmes (2.7) et (3.1) respectivement. On suppose que les Hypothèses 2.1 (pour $d=3$) et 3.1 sont vérifiées. On suppose que $u \in (H^\tau(\Omega^1))^d \times (H^\tau(\Omega^2))^d$ avec $3/2 < \tau \leq 2$ pour $k = 1$ ou $3/2 < \tau \leq 5/2$ pour $k = 2$. Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et u telle que*

$$\|u - u^h\|_{L^2, \Omega^1, \Omega^2} \leq C(h_1^\tau + h_2^\tau)\|u\|_{\tau, \Omega^1, \Omega^2}. \quad (3.21)$$

Démonstration. Soient $v \in V$, et z une solution du Problème (3.14)-(3.19),

$$\begin{aligned} a(z, v) &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathcal{A}_\ell \varepsilon(z_\ell) : \varepsilon(v_\ell) d\Omega^\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} (u - u^h)_\ell \cdot v_\ell d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_C} \sigma_{z_1 N} v_{1N} + \sigma_{z_2 N} v_{2N} d\Gamma. \end{aligned}$$

On pose $v = u - u^h$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \|u - u^h\|_{0, \Omega^1, \Omega^2}^2 &= a(z, u - u^h) - \int_{\Gamma_C} \sigma_{z_1 N} (u - u^h)_{1N} + \sigma_{z_2 N} (u - u^h)_{2N} d\Gamma \\ &= a(z - I^h z, u - u^h) - \int_{\Gamma_C} \sigma_{z_1 N} (u - u^h)_{1N} + \sigma_{z_2 N} (u - u^h)_{2N} d\Gamma \\ &\quad + a(I^h z, u - u^h), \end{aligned} \quad (3.22)$$

où $I^h z = (I_1^h z_1, I_2^h z_2)$ et I_ℓ^h est l'opérateur d'interpolation de Lagrange sur V_ℓ^h . On va maintenant travailler sur le dernier terme de l'égalité (3.22). Comme $V^h \subset V$, on déduit du Problème (3.1) et de sa version continue que :

$$\begin{aligned} a(u, v^h) + \int_{\Gamma_C} \lambda [v_N^h] d\Gamma &= l(v^h) \\ a(u^h, v^h) + \int_{\Gamma_C} \lambda^h [v_N^h] d\Gamma &= l(v^h) \end{aligned}$$

Par soustraction des deux égalités précédentes et en posant $v^h = I^h z$, on a

$$a(u - u^h, I^h z) + \int_{\Gamma_C} (\lambda - \lambda^h) [I^h z_N] d\Gamma = 0. \quad (3.23)$$

En utilisant (3.23) et la continuité de la forme bilinéaire a dans (3.22) on obtient

$$\begin{aligned} \|u - u^h\|_{0, \Omega^1, \Omega^2}^2 &\leq M \|z - I^h z\|_{1, \Omega^1, \Omega^2} \|u - u^h\|_{1, \Omega^1, \Omega^2} + \int_{\Gamma_C} (\lambda^h - \lambda) [(I^h z - z)_N] d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} (\lambda^h - \lambda) [z_N] - \sigma_{z_1 N} (u - u^h)_{1N} - \sigma_{z_2 N} (u - u^h)_{2N} d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Comme z vérifie (3.18), le dernier terme intégral dans (3.24) est négatif. En utilisant un argument de dualité et le théorème de trace on arrive à

$$\|u - u^h\|_{0, \Omega^1, \Omega^2}^2 \leq C \|z - I^h z\|_{1, \Omega^1, \Omega^2} (\|u - u^h\|_{1, \Omega^1, \Omega^2} + \|\lambda^h - \lambda\|_{1/2, *, \Gamma_C}).$$

Finalement, en utilisant l'Hypothèse 3.1 et les estimations d'erreur sur l'opérateur d'interpolation de Lagrange, on arrive à l'estimation d'erreur L^2 suivante :

$$\|u - u^h\|_{0,\Omega^1,\Omega^2} \leq C(h_1 + h_2)(\|u - u^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2} + \|\lambda^h - \lambda\|_{1/2,*,\Gamma_C}). \quad (3.25)$$

Pour conclure la preuve, on utilise les résultats du Théorème 3.1 dans (3.25). \square

Corollaire 3.2. *Soient u et u^h les solutions des Problèmes (2.7) et (2.8) respectivement. Alors, sous les mêmes hypothèses, l'estimation de la Proposition 3.3 est vérifiée.*

Démonstration. La preuve est immédiate, en effet, la solution u^h (respectivement u) de (2.8) (respectivement (2.7)) coïncide avec la première composante des solutions de (3.1) (respectivement la formulation mixte équivalente de (2.7)). \square

3.3 Problématique des macro-maillages semi-intersectés en contact, “dropping edges”

Ici, on va introduire une analyse de convergence dans le cas particulier où il existe des macro-maillages en contact non totalement intersectés. On considère donc le cas “pathologique” où Γ_C n'est pas géométriquement compatible avec une des discrétisations de Γ_C^1 ou Γ_C^2 , voir Figure 3.1. Ce cas est récurrent dans les études industrielles ou dans les tests complexes. Le but de cette section est de s'assurer de la convergence de la méthode (pour les cas bidimensionnels) et de justifier un choix numérique qui consiste à ne prendre en compte que les macro-maillages suffisamment intersectés pour évaluer le contact.

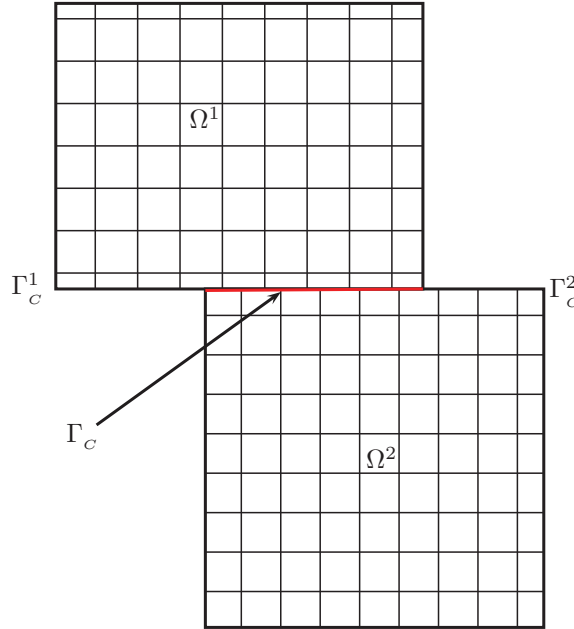


FIGURE 3.1 – Exemple de configuration où l'on ne peut pas définir de macro-maillage tel que tous les macro-éléments en contact soient totalement intersectés par Γ_C .

3.3.1 Définition du cas particulier

De manière semblable aux cas traités précédemment, on considère $V_\ell^h \subset V_\ell$ une famille d’espaces vectoriels de dimension finie indexés par h_ℓ , associée à une famille de triangulations, quadrangulations, tétraédrisations ou hexaédrisations \mathcal{T}_ℓ^h du domaine Ω^ℓ , $\ell = 1, 2$ (voir [15, 20, 28]). On suppose que les parties du bord des domaines Γ_N^ℓ , Γ_D^ℓ et Γ_C^ℓ sont consistantes avec la discrétisation de Ω^ℓ . Cependant contrairement au cas précédent, on ne suppose pas que

$$\Gamma_C = \Gamma_C^1 \cap \Gamma_C^2$$

est consistant avec une des discrétisations Γ_C^1 ou Γ_C^2 . En d’autres termes, Γ_C n’est pas une union d’éléments d’un des maillages traces provenant de Ω^1 ou Ω^2 . On rappelle la forme des espaces de discrétisation considérés pour approcher le problème :

$$V_\ell^h = \left\{ v_\ell^h \in (C(\overline{\Omega}^\ell))^d : v_\ell^h|_{\mathcal{T}} \in P^k(\mathcal{T}), \forall \mathcal{T} \in \mathcal{T}_\ell^h, v_\ell^h = 0 \text{ sur } \Gamma_D^\ell \right\},$$

où $d = 2, 3$ et $k = 1, 2$. On a alors,

$$V^h = V_1^h \times V_2^h.$$

Comme dans les cas 3D précédents, on doit supposer que l’Hypothèse 2.1 est vérifiée pour mener à bien l’analyse de convergence. Dans la suite de cette section, on supposera que T^M est un macro-maillage de Γ_C^1 , construit à partir de $\mathcal{T}_1^h \cap \Gamma_C$, satisfaisant l’Hypothèse 2.1.

Avant de procéder à l’analyse de convergence, une redéfinition de la condition de non-interpénétration est nécessaire pour prendre en compte le fait que $\Gamma_C = \Gamma_C^1 \cap \Gamma_C^2$ ne coïncide pas avec une union d’éléments d’un des maillages traces. On va uniquement imposer la condition de contact en moyenne locale sur les macro-éléments possédant une intersection assez grande avec Γ_C et simplement “omettre” les autres. Le poids de l’intersection est évalué en utilisant un paramètre $\delta \in (0, 1]$ qui est introduit dans la définition suivante.

Définition 3.2. Soit, $\delta > 0$ un petit paramètre fixe. On suppose que l’Hypothèse 2.1 est vérifiée. Un macro-élément T^m est dit admissible si

$$\int_{T^m \cap \Gamma_C} \phi_{m+1} d\Gamma > \delta \sqrt{|T^m \cap \Gamma_C| |T^m|}$$

où ϕ_{m+1} est la fonction de base associée au degré de liberté interne.

Il est facile de voir que si δ est assez petit, alors tout macro-élément inclus dans $\overline{\Gamma_C}$ est admissible. Réciproquement, tout macro-élément T^m ayant une intersection vide avec Γ_C est non admissible. Pour les cas restants (*i.e.*, T^m intersecte partiellement Γ_C) on remarque que T^m est admissible si et seulement si

$$\overline{\phi_{m+1}} \sqrt{\frac{|T^m \cap \Gamma_C|}{|T^m|}} > \delta,$$

où $\overline{\phi_{m+1}}$ désigne la moyenne de ϕ_{m+1} sur $T^m \cap \Gamma_C$. De plus, pour tout T^m on note ε le coefficient d’intersection du macro-éléments avec Γ_C

$$\varepsilon = \frac{|T^m \cap \Gamma_C|}{|T^m|}.$$

Remarque 3.3. Il existe toujours un degré de liberté interne tel que $\int_{T^m \cap \Gamma_C} \phi_{m+1} > 0 \, d\Gamma$. En effet, dans les cas bidimensionnel et linéaire tridimensionnel, toutes les fonctions de base des degrés de liberté internes sont positives. Par contre dans le cas tridimensionnel quadratique (TETRA 10, HEXA 20), le choix du DDL interne n'est pas libre. Cependant, on remarque qu'il existe toujours une fonction de base d'un nœud milieu d'une arête interne, qui est à valeurs positives, et telle que son support possède une intersection non-vide avec Γ_C .

La nouvelle version du cône convexe des déplacements admissibles est alors

$$K_\delta^h = \left\{ v^h \in V^h : \int_{T^m \cap \Gamma_C} [v_N^h] \, d\Gamma \leq 0, \quad \forall T^m \in T^M, \, T^m \text{ admissible} \right\}.$$

On remarque immédiatement que dans le cas où Γ_C est consistant avec le macro-maillage, on a $K^h = K_\delta^h$.

L'inéquation variationnelle discrète de (2.7) devient alors

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^h \in K_\delta^h \text{ vérifiant :} \\ a(u^h, v^h - u^h) \geq l(v^h - u^h), \quad \forall v^h \in K_\delta^h. \end{cases} \quad (3.26)$$

D'après le théorème de Stampacchia, le Problème (3.26) admet aussi une unique solution.

3.3.2 Analyse de convergence

La proposition à venir montre que même dans ce cas particulier, on arrive à obtenir des taux de convergence, dans le cas bidimensionnel, pour la méthode LAC utilisant la condition adaptée K_δ^h . Le cas tridimensionnel est encore en cours d'investigation.

Proposition 3.4. Soient u et u^h les solutions des Problèmes (2.7) et (3.26) respectivement. On fixe le paramètre d'admissibilité $\delta > 0$ assez petit. On suppose que $u \in (H^\tau(\Omega^1))^2 \times (H^\tau(\Omega^2))^2$ avec $3/2 < \tau < 2$ et $k = 1, 2$ et qu'il existe une constante C_1 telle que $h_2 \leq C_1 h_1$. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de (h_1, h_2) , u et δ telle que

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2} \leq C h_1^{\tau-1} \sqrt{-\ln(\delta^{2/3} h_1)} \delta^{-1} \|u\|_{\tau,\Omega^1,\Omega^2}. \quad (3.27)$$

Démonstration. Dans cette preuve, on se focalisera uniquement sur les aspects en lien avec la non conformité géométrique des discrétisations de la zone de contact Γ_C qui est le cœur du problème de cette section (*i.e.*, $\Gamma_C = \Gamma_C^1 \cap \Gamma_C^2$ n'est pas une union d'éléments d'une des discrétisations). Pour les autres ingrédients entrant en jeu dans la démonstration, on se reporte aux résultats présentés dans les deux premiers chapitres de ce travail. L'utilisation du lemme de Falk dans le cas $K_\delta^h \not\subset K$ nous donne (voir, [11]) :

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2}^2 &\leq \inf_{v^h \in K_\delta^h} \left(\|u - v^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2}^2 + \int_{\Gamma_C} \sigma_N [v_N^h - u_N] \, d\Gamma \right) \\ &\quad + \inf_{v \in K} \int_{\Gamma_C} \sigma_N [v_N - u_N^h] \, d\Gamma \end{aligned} \quad (3.28)$$

avec $\alpha > 0$.

Avant de considérer la démonstration en elle-même, on doit adapter la définition de π_1^h pour $d = 2, 3$ et $k = 1, 2$ dans le cas de figure où l'on utilise la condition K_δ^h . Soit W_ℓ^h l'espace de traces normales de V_ℓ^h sur Γ_C^ℓ . Soient ϕ_i les fonctions de base associées aux degrés de liberté de W_1^h . On note $x_i, i = 1, \dots, n$ les nœuds correspondant de $\mathcal{T}_1^h \cap \Gamma_C^1$ et ω_i est l'union des éléments (fermés) contenant x_i .

Définition 3.3. On suppose que l'Hypothèse 2.1 est vérifiée. L'opérateur

$$\pi_1^h : L^1(\Gamma_C) \longrightarrow W_1^h$$

est défini pour tout $v \in L^1(\Gamma_C)$. Si x_i est un nœud appartenant à $\overline{\Gamma_C^1} \cap \overline{\Gamma_D^1}$, alors $\pi_1^h v(x_i) = 0$. L'opérateur est alors défini localement sur chaque macro-élément $T^m \in T^M$ ayant comme nœuds $x_i, i = 1, \dots, m$ ($x_i \notin \overline{\Gamma_C^1} \cap \overline{\Gamma_D^1}$) et un degré de liberté interne noté x_{m+1} par

$$\pi_1^h v = \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j(v) \phi_j,$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i(v) = \frac{\int_{\omega_i \cap \Gamma_C} v \, d\Gamma}{|\omega_i \cap \Gamma_C|} \text{ si } \omega_i \text{ contient au moins un macro-élément admissible,} \\ \text{sinon } \alpha_i(v) = 0, \, 1 \leq i \leq m, \\ \\ \alpha_{m+1}(v) = \frac{\int_{T^m \cap \Gamma_C} v \, d\Gamma - \sum_{j=1}^m \int_{T^m \cap \Gamma_C} \alpha_j(v) \phi_j \, d\Gamma}{\int_{T^m \cap \Gamma_C} \phi_{m+1} \, d\Gamma} \text{ si } T^m \text{ est admissible,} \\ \text{sinon } \alpha_{m+1}(v) = 0. \end{array} \right.$$

Proposition 3.5. 1. L'opérateur π_1^h est linéaire et satisfait

$$\int_{T^m \cap \Gamma_C} \pi_1^h v - v \, d\Gamma = 0, \, \forall v \in L^1(\Gamma_C), \, \forall T^m \in T^M, \, T^M \text{ admissible}.$$

2. L'opérateur π_1^h est L^2 stable, i.e., il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in L^2(\Gamma_C)$

$$\|\pi_1^h v\|_{0, \Gamma_C^1} \leq C \delta^{-1} \|v\|_{0, \Gamma_C}.$$

Démonstration. (Proposition 3.5) La linéarité de π_1^h est évidente. La propriété de conservation de la moyenne sur $T^m \cap \Gamma_C$ pour les macro-éléments admissibles découle directement de la définition de π_1^h .

Soit $v \in L^2(\Gamma_C)$ et $T^m \in T^M$. On note par \tilde{T}^m le patch englobant T^m dans Γ_C : $\tilde{T}^m = \bigcup_{i: x_i \in T^m} (\omega_i \cap \Gamma_C)$.

Soit $x_i \in T^m, 1 \leq i \leq m$, on a soit $\alpha_i(v) = 0$ ou

$$\begin{aligned} |\alpha_i(v)| &\leq |\omega_i \cap \Gamma_C|^{-1} \int_{\omega_i \cap \Gamma_C} |v| \, d\Gamma \leq |\omega_i \cap \Gamma_C|^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{0, \omega_i \cap \Gamma_C} \\ &\leq |\hat{T}^M \cap \Gamma_C|^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{0, \tilde{T}^m} \\ &\leq \delta^{-1} |\overline{\phi_{m+1}}| |\hat{T}^M|^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{0, \tilde{T}^m} \\ &\leq \delta^{-1} |\hat{T}^M|^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{0, \tilde{T}^m} \end{aligned} \tag{3.29}$$

où \hat{T}^M désigne un macro-élément contenant x_i .

Alors, en utilisant conjointement (3.29) avec $|\phi_i| \leq 1$ sur Γ_C et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient que

$$\begin{aligned}
|\alpha_{m+1}(v)| &= \left| \int_{T^m \cap \Gamma_C} v \, d\Gamma - \sum_{k \neq m+1: x_k \in T^m} \int_{T^m \cap \Gamma_C} \alpha_k(v) \phi_k \, d\Gamma \right| \left| \int_{T^m \cap \Gamma_C} \phi_{m+1} \, d\Gamma \right|^{-1} \\
&\leq \left(|T^m \cap \Gamma_C|^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0, T^m \cap \Gamma_C} + \sum_{k \neq m+1: x_k \in T^m} \frac{|T^m \cap \Gamma_C|}{|\omega_k \cap \Gamma_C|^{\frac{1}{2}}} \|v\|_{0, \tilde{T}^m} \right) \left| \int_{T^m \cap \Gamma_C} \phi_{m+1} \, d\Gamma \right|^{-1} \\
&\leq \left(|T^m \cap \Gamma_C|^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0, T^m \cap \Gamma_C} + \sum_{k \neq m+1: x_k \in T^m} |T^m \cap \Gamma_C|^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0, \tilde{T}^m} \right) \left| \int_{T^m \cap \Gamma_C} \phi_{m+1} \, d\Gamma \right|^{-1} \\
&\leq C \left(\overline{\phi_{m+1}} \right)^{-1} |T^m \cap \Gamma_C|^{-1/2} \|v\|_{0, \tilde{T}^m} \\
&\leq C \delta^{-1} |T^m|^{-1/2} \|v\|_{0, \tilde{T}^m}.
\end{aligned}$$

Lorsque T^m n'est pas admissible, le résultat est trivial.

Ensuite, on va montrer la stabilité L^2 locale de π_1^h . Grâce à l'uniformité locale du maillage, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\|\pi_1^h v\|_{0, T^m} &= \left\| \sum_{i: x_i \in T^m} \alpha_i(v) \phi_i \right\|_{0, T^m} \leq \sum_{i: x_i \in T^m} |\alpha_i(v)| \|\phi_i\|_{0, T^m} \\
&\leq |T^m|^{\frac{1}{2}} \sum_{i: x_i \in T^m} |\alpha_i(v)| \\
&\leq C \delta^{-1} \|v\|_{0, \tilde{T}^m}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

De (3.30), on déduit la stabilité L^2 de π_1^h :

$$\|\pi_1^h v\|_{0, \Gamma_C^1}^2 = \sum_{T^m \in T^M} \|\pi_1^h v\|_{0, T^m}^2 \leq C \delta^{-2} \sum_{T^m \in T^M} \|v\|_{0, \tilde{T}^m}^2 \leq C \delta^{-2} \|v\|_{0, \Gamma_C}^2. \tag{3.31}$$

□

On peut maintenant commencer la preuve de la Proposition 3.4. On commence par majorer le premier infimum dans (3.28). On pose $v^h \in V^h$ tel que

$$\begin{aligned}
v_1^h &= I_1^h u_1 + R_1^h (\pi_1^h([u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2)), \\
v_2^h &= I_2^h u_2,
\end{aligned}$$

où I_ℓ^h est l'opérateur d'interpolation de Lagrange sur V_ℓ^h , $\pi_1^h : L^1(\Gamma_C) \rightarrow W_1^h$ est l'opérateur défini précédemment et R_1^h est un opérateur de relèvement discret de W_1^h dans V_1^h . En premier lieu, on montre que v^h appartient à K_δ^h . Soit T^m un macro-élément admissible

de T^M .

$$\begin{aligned}
 \int_{T^m \cap \Gamma_C} [v_N^h] d\Gamma &= \int_{T^m \cap \Gamma_C} v_1^h \cdot n_1 + v_2^h \cdot n_2 d\Gamma \\
 &= \int_{T^m \cap \Gamma_C} I_1^h u_1 \cdot n_1 - \pi_1^h(I_1^h u_1 \cdot n_1) d\Gamma + \int_{T^m \cap \Gamma_C} I_2^h u_2 \cdot n_2 - \pi_1^h(I_2^h u_2 \cdot n_2) d\Gamma \\
 &\quad + \int_{T^m \cap \Gamma_C} \pi_1^h[u_N] d\Gamma \\
 &= \int_{T^m \cap \Gamma_C} \pi_1^h[u_N] d\Gamma \\
 &= \int_{T^m \cap \Gamma_C} [u_N] d\Gamma \leq 0,
 \end{aligned}$$

on a $v^h \in K_\delta^h$. Alors, en utilisant la stabilité L^2 de π_1^h (Proposition 3.5), le théorème de trace, une inégalité inverse et les estimations d'erreur d'interpolation de Lagrange standard, le terme sous forme de norme est majoré de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \|u - v^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2} &\leq \|u_1 - I_1^h u_1\|_{1,\Omega^1} + \|u_2 - I_2^h u_2\|_{1,\Omega^2} \\
 &\quad + \|R_1^h(\pi_1^h([u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2))\|_{1,\Omega^1},
 \end{aligned}$$

en notant, pour simplifier, $\theta = [u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \|R_1^h(\pi_1^h \theta)\|_{1,\Omega^1} &\leq C \|\pi_1^h \theta\|_{1/2,\Gamma_C^1} \\
 &\leq C h_1^{-1/2} \|\pi_1^h \theta\|_{0,\Gamma_C^1} \\
 &\leq C \delta^{-1} h_1^{-1/2} \|\theta\|_{0,\Gamma_C} \\
 &\leq C \delta^{-1} h_1^{-1/2} \left(\|u_1 \cdot n_1 - I_1^h u_1 \cdot n_1\|_{0,\partial\Omega^1} + \|u_2 \cdot n_2 - I_2^h u_2 \cdot n_2\|_{0,\partial\Omega^2} \right) \\
 &\leq C \delta^{-1} h_1^{-1/2} (h_1^{\tau-1/2} \|u_1\|_{\tau-1/2,\partial\Omega^1} + h_2^{\tau-1/2} \|u_2\|_{\tau-1/2,\partial\Omega^1}) \\
 &\leq C \delta^{-1} (h_1^{\tau-1} + h_1^{-1/2} h_2^{\tau-1/2}) \|u\|_{\tau,\Omega^1,\Omega^2}, \quad 3/2 < \tau \leq k + 3/2.
 \end{aligned}$$

Finalement

$$\|u - v^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2} \leq C \delta^{-1} (h_1^{\tau-1} + h_1^{-1/2} h_2^{\tau-1/2} + h_2^{\tau-1}) \|u\|_{\tau,\Omega^1,\Omega^2}, \quad 3/2 < \tau \leq k + 1. \quad (3.32)$$

Pour pouvoir traiter le terme intégral dans l'erreur d'approximation, on introduit l'espace X_1^h des fonctions constantes par morceaux sur les macro-éléments intersectés $T^m \cap \Gamma_C$. Soit

$$\Gamma_C^{ad} = \left(\cup_{T^m \text{ admissible}} T^m \right) \cap \Gamma_C \quad \text{et} \quad \Gamma_C^{nonad} = \Gamma_C \setminus \Gamma_C^{ad}.$$

$$X_1^h = \left\{ \chi^h \in L^2(\Gamma_C^{ad}) : \chi^h|_{T^m \cap \Gamma_C} \in P^0(T^m \cap \Gamma_C), \forall T^m \in T^M, T^m \text{ admissible} \right\},$$

et l'opérateur de projection $L^2(\Gamma_C)$ classique $\bar{\pi}_1^h : L^2(\Gamma_C^{ad}) \rightarrow X_1^h$ défini pour tout $\varphi \in L^2(\Gamma_C^{ad})$ par

$$\int_{\Gamma_C^{ad}} (\varphi - \bar{\pi}_1^h \varphi) \chi^h d\Gamma = 0, \quad \forall \chi^h \in X_1^h.$$

L'opérateur $\bar{\pi}_1^h$ satisfait les estimations standard suivantes pour tout $0 < r < 1$ et tout $\varphi \in H^r(\Gamma_C^{ad})$ (voir, [6]) :

$$\|\varphi - \bar{\pi}_1^h \varphi\|_{0,T^m \cap \Gamma_C} \leq Ch_c^r |\varphi|_{r,T^m \cap \Gamma_C}, \forall T^m \text{ admissible} \in T^M, \quad (3.33)$$

$$\|\varphi - \bar{\pi}_1^h \varphi\|_{0,\Gamma_C^{ad}} + h_c^{-1/2} \|\varphi - \bar{\pi}_1^h \varphi\|_{1/2,*,\Gamma_C^{ad}} \leq Ch_c^r |\varphi|_{r,\Gamma_C^{ad}}, \quad (3.34)$$

où $\|\cdot\|_{1/2,*,\Gamma_C^{ad}}$ désigne la norme duale de $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_C^{ad}}$ et h_c le plus grand diamètre des éléments du maillage trace sur Γ_C^{ad} . Quand $r = 0$ (respectivement $r = 1$) les estimations précédentes restent valides en remplaçant $|\varphi|_{r,\cdot}$ par $\|\varphi\|_{0,\cdot}$ (respectivement $\|\varphi'\|_{0,\cdot}$).

Étant donné que pour tout T^m admissible appartenant à T^M

$$\int_{T^m \cap \Gamma_C} ([u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2) - \pi_1^h([u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2) \, d\Gamma = 0,$$

on a, en notant à nouveau $\theta = [u_N] - I_1^h u_1 \cdot n_1 - I_2^h u_2 \cdot n_2$, on a pour $3/2 < \tau \leq 5/2$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_C} \sigma_N ([v_N^h] - [u_N]) \, d\Gamma \\ &= - \int_{\Gamma_C} \sigma_N (\theta - \pi_1^h \theta) \, d\Gamma \\ &= - \sum_{T^m \text{ admissible}} \int_{T^m \cap \Gamma_C} (\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N) (\theta - \pi_1^h \theta) \, d\Gamma \\ &\quad - \sum_{T^m \text{ non admissible}} \int_{T^m \cap \Gamma_C} \sigma_N (\theta - \pi_1^h \theta) \, d\Gamma \\ &\leq C\delta^{-1} \sum_{T^m \text{ admissible}} h_{T^m}^{\tau-3/2} |\sigma_N|_{\tau-3/2,T^m \cap \Gamma_C} \|\theta\|_{0,T^m} + C\delta^{-1} \|\sigma_N\|_{0,\Gamma_C^{nonad}} \|\theta\|_{0,\Gamma_C} \\ &\leq C\delta^{-1} (h_1^{\tau-3/2} |\sigma_N|_{\tau-3/2,\Gamma_C} + \|\sigma_N\|_{0,\Gamma_C^{nonad}}) (h_1^{\tau-1/2} + h_2^{\tau-1/2}) \|u\|_{\tau,\Omega^1,\Omega^2}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Il reste alors à majorer $\|\sigma_N\|_{0,\Gamma_C^{nonad}}$.

On suppose alors que $d = 2$. Dans ce cas, il est facile de voir que $\overline{\phi_{m+1}}$ est équivalent à une constante pré à ε , la condition d'admissibilité devient alors :

$$\varepsilon^{3/2} > \delta$$

et un macro-élément est non-admissible si $\varepsilon \leq \delta^{2/3}$.

Remarque 3.4. Pour pouvoir étendre la démonstration au cas tridimensionnel, on aurait besoin de minorer $\overline{\phi_{m+1}}$ en fonction de ε .

De plus, comme δ est choisi assez petit, il existe un nombre fini, ne dépendant pas du maillage, de macro-éléments non admissibles : si Γ_C est un segment, il existe au plus deux macro-éléments non-admissibles. Par conséquent si $3/2 < \tau < 2$ on a

$$\begin{aligned} \|\sigma_N\|_{0,\Gamma_C^{nonad}} &\leq \|\sigma_N\|_{L^{\frac{1}{2-\tau}}(\Gamma_C^{nonad})} \|1\|_{L^{\frac{1}{\tau-1}}(\Gamma_C^{nonad})} \\ &\leq \|\sigma_N\|_{L^{\frac{1}{2-\tau}}(\Gamma_C)} |\Gamma_C^{nonad}|^{\tau-1} \\ &\leq C \|\sigma_N\|_{\tau-3/2,\Gamma_C} |2\varepsilon h_1|^{\tau-1} \\ &\leq C\delta^{(2\tau-2)/3} \|\sigma_N\|_{\tau-3/2,\Gamma_C} h_1^{\tau-1}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_C} \sigma_N ([v_N^h] - [u_N]) \, d\Gamma \\ & \leq C\delta^{-1}h_1^{\tau-3/2} \|\sigma_N\|_{\tau-3/2, \Gamma_C} \left(1 + \delta^{(2\tau+1)/3} h_1^{1/2}\right) (h_1^{\tau-1/2} + h_2^{\tau-1/2}) \|u\|_{\tau, \Omega^1, \Omega^2} \\ & \leq C\delta^{-1}h_1^{\tau-3/2} (h_1^{\tau-1/2} + h_2^{\tau-1/2}) \|u\|_{\tau, \Omega^1, \Omega^2}^2 \quad 3/2 < \tau < 2. \end{aligned}$$

En supposant que $h_2 \leq Ch_1$ L'erreur d'approximation est majorée par

$$C\delta^{-1}h_1^{\tau-1} \|u\|_{\tau, \Omega^1, \Omega^2}, \quad 3/2 < \tau < 2.$$

On pourrait étendre le résultat au cas $3/2 < \tau < 5/2$ mais cela n'améliorerait pas le résultat de convergence présenté dans le Théorème 3.4 car on est limité par l'erreur de consistance comme on va le voir maintenant.

Pour conclure, il nous reste à majorer l'erreur de consistance, le second infimum dans (3.28). Pour ce faire, on choisit $v = 0$. Sachant que $\bar{\pi}_1^h \sigma_N$ est une fonction constante et négative sur Γ_C^{ad} :

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_C} \sigma_N [u_N^h] \, d\Gamma & \leq - \int_{\Gamma_C^{ad}} (\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N) [u_N^h] \, d\Gamma - \int_{\Gamma_C^{nonad}} \sigma_N [u_N^h] \, d\Gamma \\ & = - \int_{\Gamma_C^{ad}} (\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N) ([u_N^h] - [u_N]) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_C^{ad}} (\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N) [u_N] \, d\Gamma \\ & \quad - \int_{\Gamma_C^{nonad}} \sigma_N [u_N^h - u_N] \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Le premier terme (3.36) est majoré en utilisant (3.34), le théorème de trace et l'inégalité de Young pour $3/2 < \tau \leq 5/2$:

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_C^{ad}} (\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N) ([u_N^h] - [u_N]) \, d\Gamma & \leq \|\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N\|_{1/2, *, \Gamma_C^{ad}} \| [u_N^h] - [u_N] \|_{1/2, \Gamma_C^{ad}} \\ & \leq Ch_1^{2(\tau-1)} \|u\|_{\tau, \Omega^1, \Omega^2}^2 + \frac{\alpha}{3} \|u - u^h\|_{1, \Omega^1, \Omega^2}^2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Le second terme dans (3.36) est majoré pour tout macro-élément admissible $T^m \in T^M$ en utilisant les techniques de preuve introduites précédemment :

$$- \int_{T^m \cap \Gamma_C} (\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N) [u_N] \, d\Gamma \leq Ch_{T^m \cap \Gamma_C}^{2\tau-2} \left(\|\sigma_N\|_{\tau-3/2, T^m \cap \Gamma_C}^2 + \|[u_N]\|_{\tau-3/2, T^m \cap \Gamma_C}^2 \right).$$

On arrive à

$$- \int_{\Gamma_C^{ad}} (\sigma_N - \bar{\pi}_1^h \sigma_N) [u_N] \, d\Gamma \leq Ch_1^{2(\tau-1)} \|u\|_{\tau, \Omega^1, \Omega^2}^2, \quad 3/2 < \tau \leq 5/2. \quad (3.38)$$

Le dernier terme dans (3.36) (qui est le terme limitant dans cette analyse) est majoré de la manière suivante pour $3/2 < \tau < 2$ et $q > 1/(\tau - 1)$ et en choisissant $q = -\ln(\varepsilon h_1)$:

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_C^{nonad}} \sigma_N [u_N^h - u_N] \, d\Gamma & \leq \|\sigma_N\|_{L^{\frac{1}{2-\tau}}(\Gamma_C^{nonad})} \|1\|_{L^{\frac{q}{q(\tau-1)-1}}(\Gamma_C^{nonad})} \|[u_N^h - u_N]\|_{L^q(\Gamma_C^{nonad})} \\ & \leq \|\sigma_N\|_{L^{\frac{1}{2-\tau}}(\Gamma_C)} |\Gamma_C^{nonad}|^{\tau-1-1/q} \|[u_N^h - u_N]\|_{L^q(\Gamma_C)} \\ & \leq C\sqrt{q} \|\sigma_N\|_{\tau-3/2, \Gamma_C} (2\varepsilon h_1)^{\tau-1-1/q} \| [u_N^h - u_N] \|_{1/2, \Gamma_C} \\ & \leq C\sqrt{-\ln(\varepsilon h_1)} \|\sigma_N\|_{\tau-3/2, \Gamma_C} (2\varepsilon h_1)^{\tau-1} \|u - u^h\|_{1, \Omega^1, \Omega^2} \\ & \leq \frac{\alpha}{3} \|u - u^h\|_{1, \Omega^1, \Omega^2}^2 + C(-\ln(\delta^{2/3} h_1)) \|\sigma_N\|_{\tau-3/2, \Gamma_C}^2 h_1^{2(\tau-1)} \delta^{4(\tau-1)/3} \end{aligned}$$

□

Deuxième partie

Étude numérique de la méthode
Local Average Contact

Table des matières

4	Étude d'impact de l'implémentation de la méthode LAC dans <i>Code_Aster</i>	85
4.1	Opérateur CREA_MALLAGE, création du maillage de calcul	86
4.1.1	Le cahier des charges	86
4.1.2	Réalisation	86
4.1.2.1	Stockage du macro-maillage	86
4.1.2.2	Le cas 2D	87
4.1.2.3	Le cas 3D	88
4.1.2.4	Quelques remarques sur le découpage	88
4.2	Opérateur DEFI_CONTACT, définition des espaces fonctionnels	89
4.2.1	Illustration de la technique sur le cas TRIA 3	90
4.2.2	Illustration des difficultés sur le cas QUAD 4	91
4.2.2.1	Première difficulté	92
4.2.2.2	Seconde difficulté	93
4.2.3	Les autres cas	93
4.2.3.1	Les TRIA 6	93
4.2.3.2	Les QUAD 8	93
4.2.3.3	Les SEG 2	93
4.2.3.4	Les SEG 3 ou QUAD 9	95
4.3	Opérateur STAT_NON_LINE, construction et résolution du système	96
4.3.1	Algorithme de résolution des non-linéarités liées au contact	96
4.3.2	Appariement	97
4.3.2.1	Algorithme de recherche de complexité linéaire	99
4.3.2.2	Outil de projection	100
4.3.2.3	Outil "jeu" moyen	101
4.3.2.4	Conclusion	104
4.3.3	Calcul des matrices de contact	105
4.3.3.1	Calcul des matrices élémentaires de contact $C^{M(elem)}$. . .	105
4.3.3.2	Choix de la normale	106
4.3.4	Assemblage intelligent	107
4.3.5	Remarque sur la convexité	108
4.3.6	Gestion des maillages quadratiques	109
4.3.7	Post-traitement	110
4.4	Conclusion	110

5	Validation numérique “académique”	111
5.1	Analyse qualitative et quantitative comparative entre la méthode LAC et une méthode de type “collocation” :	111
5.1.1	Présentation des cas tests	111
5.1.1.1	Patch test de Taylor	112
5.1.1.2	Poutre en flexion en contact	113
5.1.1.3	Contact de Hertz	114
5.1.1.4	Inclusion de deux sphères creuses sous pression	116
5.1.2	Analyse des résultats	118
5.1.2.1	Patch test de Taylor	118
5.1.2.2	Poutre en flexion en contact	128
5.1.2.3	Contact de Hertz	142
5.1.2.4	Inclusion de deux sphères creuses sous pression	155
5.2	Validation des taux de convergence théoriques	169
5.2.1	Cas test des solutions manufacturées	169
5.2.1.1	Présentation du cas test	170
5.2.1.2	Courbes de convergence	172
5.2.2	Cas test de Hertz avec solution de référence	175
5.2.2.1	Présentation du cas test	175
5.2.2.2	Courbes de convergence	175
5.3	Conclusion	176
6	Évaluation numérique : vers les cas test industriels	177
6.1	Multi-Contact	177
6.1.1	Présentation du cas test	177
6.1.1.1	Configuration 2D	177
6.1.1.2	Configuration 3D	178
6.1.2	Analyse des résultats	179
6.1.2.1	Cas 2D axisymétrique	179
6.1.2.2	Cas 3D	181
6.1.3	Conclusion	183
6.2	Ironing	183
6.2.1	Présentation du cas test	183
6.2.1.1	Configuration 2D	183
6.2.1.2	Configuration 3D	185
6.2.2	Analyse des résultats	185
6.2.2.1	Cas 2D	185
6.2.2.2	Cas 3D	189
6.2.3	Conclusion	192
6.3	Ecrasement d’un demi anneau élastique	192
6.3.1	Présentation du cas test	193
6.3.1.1	Configuration 2D	193
6.3.1.2	Configuration 3D	194
6.3.2	Analyse des résultats	195

6.3.2.1	Cas 2D	195
6.3.2.2	Cas 3D	199
6.3.3	Conclusion	203
6.4	Validation d'un modèle sain d'ailette d'un rotor BP100	203
6.4.1	Présentation du modèle	203
6.4.2	Validation du modèle avec prise en compte du contact par la méthode LAC	206
6.4.2.1	Résultats en déplacement	207
6.4.2.2	Répartition des pressions de contact	208
6.4.2.3	Répartition des contraintes de Von Mises	209
6.4.3	Synthèse	212
6.5	Conclusion	212
Conclusion et perspectives		215
Bibliographie		217

Résumé théorique de la méthode LAC

Dans cette seconde partie, on aborde l'expérimentation numérique de la méthode LAC dans le logiciel de calcul par éléments finis industriel *Code_Aster*, développé au sein du département d'Analyse Mécanique et Acoustique d'EDF R&D. Depuis plus de vingt ans, ce code de calcul par éléments finis est à la fois un code de recherche, où sont capitalisés les résultats de la recherche d'EDF en mécanique des structures ; mais aussi un des outils de simulation numérique mis à la disposition des divisions d'ingénierie. Il est notamment utilisé pour réaliser différentes études sur les composants des moyens de production électrique (nucléaire, hydraulique...) ainsi que pour justifier de la sécurité des installations auprès de l'Autorité de Sûreté Nucléaire (ASN).

Dans un premier temps, on présentera les choix techniques qui ont été pris pour implémenter une première version de la méthode. Ensuite on réalisera une première analyse numérique sur une batterie de cas tests "élémentaires" en comparant les résultats obtenus avec la méthode LAC à ceux obtenus par une méthode de collocation. Finalement, on abordera des tests plus complexes faisant intervenir des grands déplacements, grandes déformations et rotations. Pour conclure la partie, on confrontera la méthode à un modèle réaliste d'étude, simulant la relation de contact entre une ailette soumise à une force centrifuge et son attache.

Afin que cette partie soit auto-portante, on va rappeler succinctement les principaux résultats présentés dans la première partie de ce manuscrit. Dans ce travail, on s'intéresse à la modélisation des problèmes de contact dans un code éléments finis industriel. Les méthodes les plus utilisées dans le milieu industriel sont basées sur des algorithmes de type nœud-segment en $2D$ et de type nœud-facette en $3D$. Ces méthodes sont connues pour échouer au patch test de Taylor dans le cas général des maillages incompatibles (voir partie 5.1.1.1) et pour mener à des analyses mathématiques sous optimales. D'autre part, le milieu académique a été très productif dans ce domaine ces quinze dernières années. Les méthodes les plus abouties sont les méthodes "mortar" (voir [14]) adaptées au contact (premiers travaux [10, 44, 49, 66]). Ces méthodes consistent à utiliser une simple projection L^2 sur un espace joint, *i.e.*, espace d'éléments finis entre les deux objets au niveau de la zone de contact Γ_C . Les différents choix d'espaces joints engendrent toute une famille de méthodes de type "mortar". Cependant ces méthodes possèdent d'importants désavantages lorsque l'on considère leur implémentation de manière générique dans un code industriel. Les deux principaux inconvénients dans notre cas sont la non-localité de la méthode (méthodes "mortar" standard [10, 44, 66, 67]) et la définition non analytique des espaces éléments finis joints pour certains types d'éléments (méthode "dual mortar" [49, 64]).

Le but de ce travail de thèse est donc de définir une méthode donnant des résultats numériques et mathématiques d'aussi bonne qualité que ceux obtenus par les méthodes "mortar" tout en gardant les aspects (localité, définition analytique des espaces joints, etc...) rendant l'implémentation dans **Code_Aster** plus aisée en préservant l'architecture actuelle du code, ce qui permettra en particulier de bénéficier des améliorations génériques comme la parallélisation et cela lorsque l'on considère tous les types d'éléments utilisés (tétraèdres à 4 et 10 nœuds, hexaèdres à 8, 20 et 27 nœuds pour les cas 3D ; triangles à 3 et 6 nœuds, quadrangles à 4 et 8 nœuds pour les cas 2D). Pour ce faire, on va définir une condition de contact simple qui consiste à satisfaire les conditions de contact en moyenne sur chaque macro-élément d'un macro-maillage défini de manière idoine. Cette méthode est intitulée méthode Local Average Contact (LAC).

Le problème de contact :

Formulation forte

On cherche le champ de déplacement $u = (u_1, u_2) : \Omega^1 \times \Omega^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou $d = 3$) tel que (3.39)–(3.46) soient satisfaites pour $\ell = 1, 2$:

$$-\operatorname{div} \sigma(u_\ell) = f_\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell, \quad (3.39)$$

$$\sigma(u_\ell) = \mathcal{A}_\ell \varepsilon(u_\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell, \quad (3.40)$$

$$\sigma(u_\ell) n_\ell = F_\ell \quad \text{sur } \Gamma_N^\ell, \quad (3.41)$$

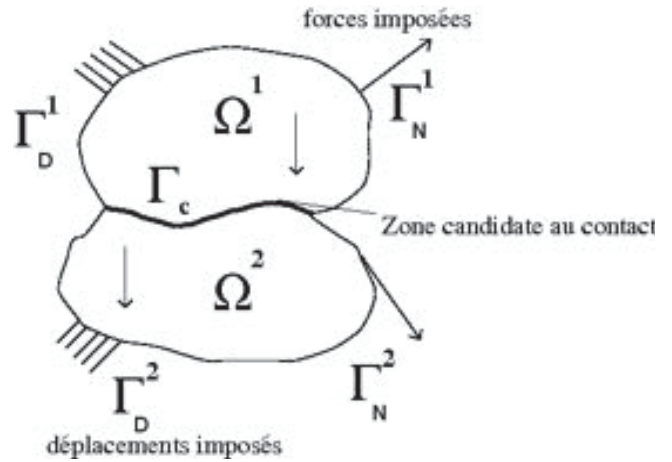
$$u_\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D^\ell, \quad (3.42)$$

$$[u_N] \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_C, \quad (3.43)$$

$$\sigma_N \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_C, \quad (3.44)$$

$$\sigma_N [u_N] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C, \quad (3.45)$$

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C. \quad (3.46)$$



où $[v_N] = \sum_{\ell=1}^2 v_\ell \cdot n_\ell$.

Les équations (3.39) à (3.42) correspondent au problème mécanique considéré (pour simplifier, on se place dans le cadre d'un problème d'élasticité linéaire) où \mathcal{A} est un tenseur de quatrième ordre elliptique, symétrique et à composantes dans L^∞ provenant de la loi de comportement associée au solide Ω^ℓ avec condition de Dirichlet sur le bord Γ_D^ℓ et condition de Neumann sur le bord Γ_N^ℓ . À ces équations, on ajoute les conditions de contact sur Γ_C , à savoir une condition de non interpénétration pour le saut de déplacement $[u_N]$ (3.43), une condition de signe pour la pression normale σ_N la zone de contact (3.44) et une condition de complémentarité entre ces deux derniers champs (3.45). La dernière équation vient du fait que l'on considère le contact sans frottement dans ce travail.

Formulation faible

A partir des équations (3.39) à (3.46), on peut introduire une formulation faible du problème de contact sous la forme de l'inéquation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que, } \forall v \in K : \\ \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathcal{A}_\ell \varepsilon(u_\ell) : \varepsilon(v_\ell - u_\ell) d\Omega^\ell \geq \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_\ell \cdot (v_\ell - u_\ell) d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_N^\ell} F_\ell \cdot (v_\ell - u_\ell)_N d\Gamma^\ell. \end{array} \right. \quad (3.47)$$

où $K \subset V$ est le cône convexe des déplacements admissibles (K contient la condition de non-interpénétration). On a alors :

$$V_\ell = \left\{ v_\ell \in (H^1(\Omega^\ell))^d : v = 0 \text{ sur } \Gamma_D^\ell \right\},$$

$$V = V_1 \times V_2,$$

$$K = \{v \in V : [v_N] \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\}.$$

On notera par la suite :

$$a(u, v) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathcal{A}_\ell \varepsilon(u_\ell) : \varepsilon(v_\ell) d\Omega^\ell,$$

$$l(v) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_\ell \cdot v_\ell d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_N^\ell} F_\ell \cdot v_\ell d\Gamma^\ell.$$

On introduit le problème mixte équivalent : Trouver $u \in V$ et $\lambda \in M$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u, v) - b(\lambda, v) = l(v), \quad \forall v \in V \\ b(\mu - \lambda, u) \geq 0, \quad \forall \mu \in M, \end{array} \right. \quad (3.48)$$

avec

$$b(\mu, v) = \int_{\Gamma_C} \mu [v_N] d\Gamma,$$

et

$$M = \left\{ \mu \in H^{-1/2}(\Gamma_C) : \int_{\Gamma_C} \mu \psi d\Gamma \leq 0 \quad \forall \psi \in H^{-1/2}(\Gamma_C), \psi \geq 0 \right\}.$$

Remarque 3.5. Les problèmes (3.47) et (3.48) sont bien posés. On a donc existence et unicité des solutions (u, λ) . De plus, les solutions u du Problème (3.48) et u du Problème (3.47) sont identiques.

Problèmes discrets

Dans ce paragraphe, on va introduire le problème discret et se concentrer sur la condition de contact proposée dans ce travail.

Inéquation variationnelle discrète

On considère le problème de contact discret du point de vue inéquation variationnelle (discrétisation du problème (3.47)) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^h \in K^h \text{ tel que :} \\ a(u^h, v^h - u^h) \geq l(v^h - u^h), \quad \forall v^h \in K^h. \end{cases} \quad (3.49)$$

où $K^h \subset V^h$ est le cône convexe des déplacements admissibles, a et l les formes bilinéaire et linéaire définies précédemment.

Pour définir une méthode, on doit choisir les espaces discrets V_ℓ^h et l'ensemble K^h . Soit \mathcal{T}_ℓ^h une triangulation ou tétraédrisation régulière de $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$, où $d = 2, 3$. On définit alors

$$V_\ell^h = \left\{ v_\ell^h \in (C(\overline{\Omega}^\ell))^d : v_\ell^h|_T \in P_k(T), \forall T \in \mathcal{T}_\ell^h, v_\ell^h = 0 \text{ sur } \Gamma_D^\ell \right\},$$

où $k = 1, 2$,

$$V^h = V_1^h \times V_2^h.$$

On se propose d'utiliser la condition de contact suivante :

$$K^h = \left\{ v^h \in V^h : \int_{T^m} [v_N^h] d\Gamma \leq 0 \quad \forall T^m \in T^M \right\},$$

où T^M est un macro-maillage d'éléments T^m à définir selon le choix de V^h .

Remarque 3.6. Cette condition de contact s'inspire des méthodes de type “mortar”, tout en conservant un aspect local. En effet, la matrice de projection mortar n'est plus une matrice pleine car l'inverse de la matrice de base de l'espace $P^0(T^M)$ est diagonale. Cette propriété nous assure que les matrices de projection “mortar” (produit matriciel entre la matrice de base inverse de l'espace $P^0(T^M)$ et les matrices de couplage entre l'espace “mortar” et les espaces d'approximation, voir [44]) sont locales. Cependant, on sait que la simple condition de type

$$\int_{\mathcal{T}^h \cap \Gamma_C} [v_N^h] d\Gamma \leq 0,$$

n'est pas stable pour tous les éléments couramment utilisés dans les études de l'ingénierie (notamment en 3D, où seul l'hexaèdre à 27 nœuds est stable naturellement), et ne mène donc pas à des analyses mathématiques optimales. Cependant, en élargissant légèrement le support d'intégration, selon les cas, on arrive à démontrer des résultats de convergence optimale et de stabilité.

Formulation mixte discrète

On introduit le problème mixte équivalent : Trouver $u^h \in V^h$ et $\lambda^h \in M^h$ tel que :

$$\begin{cases} a(u^h, v^h) - b(\lambda^h, v^h) = l(v^h), \quad \forall v^h \in V^h \\ b(\mu^h - \lambda^h, u^h) \geq 0, \quad \forall \mu^h \in M^h, \end{cases} \quad (3.50)$$

avec

$$M^h = \{\mu^h \in X_1^h : \mu^h \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\},$$

où

$$X_1^h = \{\mu^h \in L^2(\Gamma_C) : \mu|_{T^m}^h \in P^0(T^m), \forall T^m \in T^M\}.$$

On obtient donc une méthode “mortar P^0 ” qui sera automatiquement stabilisée par la définition du macro-maillage T^M .

Remarque 3.7. La condition de contact dans K^h étant fixée, l’espace des multiplicateurs de Lagrange sera toujours un sous-espace de $P^0(T^m)$ quel que soit le type d’éléments finis utilisé dans l’espace d’approximation des déplacements V^h . On remarque donc que l’ordre de la condition de contact reste fixe pour tout espace d’approximation considéré (linéaire ou quadratique), seule la définition du macro-maillage varie pour assurer les bonnes propriétés mathématiques de la méthode.

Résultats mathématiques

Hypothèse 3.2. (*Hypothèse du DDL interne*)

Pour tout macro-élément $T^m \in T^M$, il existe un degré de liberté x_i de V_1^h tel que $\text{supp}(\phi_i) \subset T^m$, où ϕ_i est la fonction de base associée à x_i .

Remarque 3.8. On note qu’il existe une taille minimale pour les macro-maillages permettant à la fois de satisfaire l’hypothèse 3.2 et de garantir la localité de la méthode. On note aussi que le choix du maillage trace utilisé pour définir le macro-maillage est libre ; ici, on a choisi le maillage 1.

On peut maintenant rappeler les deux principaux résultats de convergence de la méthode LAC.

Théorème 3.2. Soient u et u^h les solutions des problèmes de contact continu (3.47) et discret (3.49). On suppose que $u \in (H^s(\Omega^1))^d \times (H^s(\Omega^2))^d$ avec $d = 2, 3$ et $3/2 < s \leq 2$ ($3/2 \leq s < 5/2$ si $k = 2$). Si l’hypothèse 3.2 est satisfaite, alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h_1, h_2 (où h_1 et h_2 sont les paramètres de discrétisation du solide 1 et du solide 2 respectivement) et u , telle que

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2} \leq C(h_1^{s-1} + h_2^{s-1})\|u\|_{s,\Omega^1,\Omega^2}.$$

Théorème 3.3. Soient (u, λ) et (u^h, λ^h) les solutions des problèmes de contact continu (3.48) et discret (3.50). On suppose que $u \in (H^s(\Omega^1))^d \times (H^s(\Omega^2))^d$ avec $d = 2, 3$ et $3/2 < s \leq 2$ ($3/2 < s \leq 5/2$ si $k = 2$). Si l’hypothèse 3.2 est satisfaite, alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h_1, h_2 et u , telle que

$$\|\lambda - \lambda^h\|_{1/2,*,\Gamma_C} + \|u - u^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2} \leq C(h_1^{s-1} + h_2^{s-1})\|u\|_{s,\Omega^1,\Omega^2},$$

où $\|\cdot\|_{1/2,*,\Gamma_C}$ est la norme duale de $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_C}$.

Remarque 3.9. Dans la suite de ce document on adoptera la convention suivante : on nommera surface esclave la surface sur laquelle on aura défini les macro-maillages, c’est à dire la surface portant les multiplicateurs de Lagrange de contact dans le cas de la formulation mixte (3.50). La surface en vis-à-vis avec cette dernière sera la surface maître.

Formulation matricielle

On considère les matrices suivantes $C^E \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$, $C^M \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{R})$ et $M^{LAC} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, où $\mathcal{M}_{m,k}$ correspond à l'espace des matrices rectangulaires de taille $m \times k$ et \mathcal{M}_k correspond à l'espace des matrices carrées de taille k , définies par :

$$C_{ij}^E = \int_{T_j} \phi_{i_N}^E d\Gamma, \quad C_{ij}^M = \int_{T_j} \phi_{i_N}^M d\Gamma,$$

$$M_{ij}^{LAC} = \delta_{ij} |T^i|,$$

où les T^i sont les supports des fonctions de base de $P^0(T^M)$, les ϕ^E sont les fonctions de base de degré k associées à la surface esclave et les ϕ^M sont les fonctions de base de degré k associées à la surface maître.

Soit U le champ de déplacement et Λ le multiplicateur de lagrange, la formulation matricielle du problème (3.50) est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} K_{NN} & K_{NM} & K_{NE} & 0 \\ K_{MN} & K_{MM} & K_{ME} & C^M \\ K_{EN} & K_{EM} & K_{EE} & C^E \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_N \\ U_M \\ U_E \\ \Lambda \end{bmatrix} = F, \\ M^{LAC^{-1}} ({}^t C^E U_E + {}^t C^M U_M) \leq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^k, \\ M^{LAC} \Lambda \leq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^k, \\ M^{LAC^{-1}} ({}^t C^E U_E + {}^t C^M U_M) \cdot M^{LAC} \Lambda = 0 \text{ dans } \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (3.51)$$

En remarquant que M^{LAC} est diagonale définie positive, on a équivalence entre (3.51) et la formulation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} K_{NN} & K_{NM} & K_{NE} & 0 \\ K_{MN} & K_{MM} & K_{ME} & C^M \\ K_{EN} & K_{EM} & K_{EE} & C^E \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_N \\ U_M \\ U_E \\ \Lambda \end{bmatrix} = F, \\ {}^t C^E U_E + {}^t C^M U_M \leq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^k, \\ \Lambda \leq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^k, \\ ({}^t C^E U_E + {}^t C^M U_M) \cdot \Lambda = 0 \text{ dans } \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (3.52)$$

On résout le problème (3.52) en utilisant une stratégie des contraintes actives (active set) couplée à un algorithme de Newton.

Chapitre 4

Étude d'impact de l'implémentation de la méthode LAC dans *Code_Aster*

Ce chapitre concerne l'étude d'impact de l'implémentation de la méthode “LAC” (Local Average Contact) dans *Code_Aster*. On discutera plus particulièrement des choix d'implémentation liés à la nouvelle condition de contact en évitant la création de nouveaux types de mailles dans *Code_Aster* et en s'insérant dans le formalisme de gestion du contact déjà existant. Il convient donc pour cette première version d'implémentation de la méthode d'adopter la stratégie de contact “maillé” (on va définir des mailles “virtuelles” de contact permettant de réaliser les calculs élémentaires des contributions de contact) et une approche de type Newton généralisé, approche développée durant les travaux de la thèse précédente dans ce domaine, voir [55].

Les opérateurs impactés par la méthode sont :

- CREA_MALLAGE
- DEFI_CONTACT
- STAT_NON_LINE

Remarque 4.1. On avertit le lecteur que ce chapitre technique utilise beaucoup de formalisme propre à *Code_Aster*. Cependant, on pourra y trouver des éléments de réponse concernant les choix numériques qui ont été entrepris pour développer la première version de l'implémentation de la méthode LAC dans *Code_Aster*.

La méthode proposée implique les évolutions suivantes :

- Une modification du maillage sur la zone de contact esclave (non invasive dans le volume), impliquant un impact dans l'opérateur CREA_MALLAGE
- Une redéfinition des Lagrangiens de contact, une astuce d'implémentation de l'espace $P^0(T^M)$, impliquant un impact dans l'opérateur DEFI_CONTACT, et un impact dans les catalogues (nouveaux types d'éléments).
- Un nouvel appariement de type “segment-segment” en 2D et de type “face-face” en 3D, une nouvelle évaluation des statuts de contact et un nouveau calcul élémentaire, impliquant un impact dans l'opérateur STAT_NON_LINE.

De plus, des opérations particulières de post-traitement devront être envisagées, aussi bien au niveau de la structure de donnée résultat issue de l'opérateur `STAT_NON_LINE` qu'au niveau plus global pour le contact par la création d'un opérateur spécifique :

- `POST_CONTACT`.

4.1 Opérateur `CREA_MAILLAGE`, création du maillage de calcul

4.1.1 Le cahier des charges

Le socle théorique nous impose de satisfaire l'Hypothèse 3.2. Deux approches sont alors envisageables : réunir les mailles de la zone de contact esclave en patchs (macro-mailles) (cette méthode est facilement réalisable dans le cas 2D et beaucoup plus complexe à mettre en oeuvre dans le cas 3D) ou garder une trace des mailles de la zone de contact esclave données par l'utilisateur pour définir le macro-maillage et raffiner localement ce maillage afin d'obtenir un maillage de calcul satisfaisant l'hypothèse. Dans un souci de simplicité, de cohérence entre l'approche 2D et l'approche 3D, et pour ne pas déraffiner la condition de contact, on utilisera la méthode de raffinement local dans les cas 2D et 3D. En effet, sachant que la méthode proposée repose déjà sur une gestion du contact uniquement en moyenne, il convient de laisser à l'utilisateur un contrôle sur la taille des macro-éléments en utilisant la trace sur la zone de contact de son maillage comme macro-maillage après raffinement local.

Le nouveau mot-clef facteur `CREA_PATCH` de l'opérateur doit alors satisfaire les points suivants :

- stocker les informations relatives au macro-maillage,
- définir un couple maillage de calcul macro-maillage satisfaisant l'hypothèse 3.2,
- si le maillage doit être raffiné, utiliser un raffinement local (non communicant à tout l'objet esclave) et créer un maillage conforme conservant le même type de mailles (**TRIA 3** découpé en **TRIA 3** etc...) On suppose que l'utilisateur a choisi le "bon" type d'élément pour son problème,
- mettre à jour les groupes de mailles si nécessaire.

Dans cette première version de l'implémentation de la méthode, on considère uniquement les mailles 2D **TRIA 3**, **TRIA 6**, **QUAD 4**, et **QUAD 8**, et les mailles 3D **TETRA 4**, **TETRA 10**, **HEXA 8**, **HEXA 20** et **HEXA 27**. On exclut dans cette première version de l'implémentation le cas des maillages pouvant contenir des prismes ou des pyramides au dessus de la zone de contact.

4.1.2 Réalisation

4.1.2.1 Stockage du macro-maillage

Le macro-maillage sera caractérisé par 3 objets, une collection dispersée `.PATCH` caractérisant chaque macro-maille, et deux connectivités inverses `.CONOPA`, et `.COMAPA`, permettant de connecter un nœud (respectivement une maille) à sa macro-maille. Ces 3 objets seront rajoutés comme attributs à la structure de donnée `sd_maillage`. La collection `.PATCH` possède `nbpatch + 1` éléments (où `nbpatch` est le nombre de macro-mailles), le premier élément de la collection contient des informations sur le nombre de macro-mailles, les indices de

début et fin de chaque zone de contact ; les autres éléments caractérisent les macro-maillages. Chaque macro-maille est caractérisée par un type, le numéro du nœud portant le DDL interne, et le numéro des nœuds internes supplémentaires si nécessaire (voir cas **QUAD 4**, **HEXA 8** et **HEXA 20**). Les mailles qui composent chaque macro-maille sont retrouvées en parcourant soit le groupe de mailles définissant la surface esclave mise à jour, soit la connectivité inverse `.COMAPA`.

4.1.2.2 Le cas 2D

Dans le cas 2D, l'interface de contact esclave est "1D". Cette dernière est maillée soit en **SEG 2** soit en **SEG 3**. En premier lieu, on remarque que le **SEG 3** associé à lui-même (macro-maille) satisfait l'hypothèse du DDL interne. Il suffit alors de renseigner la collection `.PATCH` et les nouvelles connectivités de la `sd_maillage` directement.

Dans le cas **SEG 2**, il existe deux découpes selon le type de la maille de corps associée. Dans le cas **TRIA 3**, on ajoute un nœud au centre de la maille **SEG 2** et on reconstruit les deux nouveaux éléments de peau et les deux nouveaux éléments de corps tout en renseignant la collection `.PATCH` et les connectivités `.COMAPA` et `.CONOPA`. Dans le cas **QUAD 4**. Étant donné que l'on souhaite procéder à un découpage conforme, on ajoute deux nœuds dans la maille **SEG 2**, et deux nœuds dans la maille **QUAD 4**. On peut ensuite reconstruire les trois nouveaux éléments de peau et les 4 nouveaux éléments de corps tout en renseignant les informations caractérisant la macro-maille. Les résultats de ces opérations sont présentés dans la Figure 4.1.

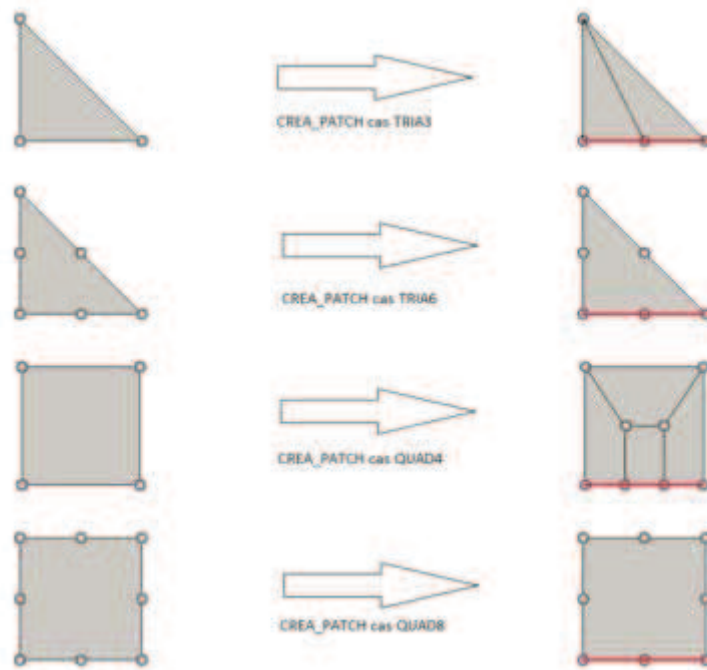


FIGURE 4.1 – Résultats de l'opérateur `CREA_PATCH` en 2D, les macro-maillages associés à chaque découpe sont surlignés en rouge.

Remarque 4.2. On portera une attention particulière à l'orientation des nouvelles mailles créées, à la conformité du maillage de calcul créé ainsi qu'à l'actualisation des groupes de

maille. Cependant, on ne peut pas actualiser les groupes de nœuds. En effet, il n'est pas possible de déterminer si un nouveau nœud rentre dans un groupe de nœuds déjà défini ou non.

4.1.2.3 Le cas 3D

Dans le cas 3D, l'interface de contact esclave est "2D". Cette dernière peut être maillée en **TRIA 3**, **TRIA 6**, **QUAD 4**, **QUAD 8** et **QUAD 9**. Comme dans le cas 2D, la maille **QUAD 9** associée à elle même satisfait l'hypothèse du DDL interne ; on peut donc directement renseigner les structures de données contenant les informations relatives au macro-maillage sans raffiner localement. Dans les autres cas, on utilisera deux découpes types, l'une pour les cas tétraédriques, et l'autre pour les cas hexaédriques. Ces deux découpes sont conformes dans le sens où l'on découpe un élément en générant le même type d'éléments. Les résultats de ces opérations sont présentés dans la Figure 4.2.

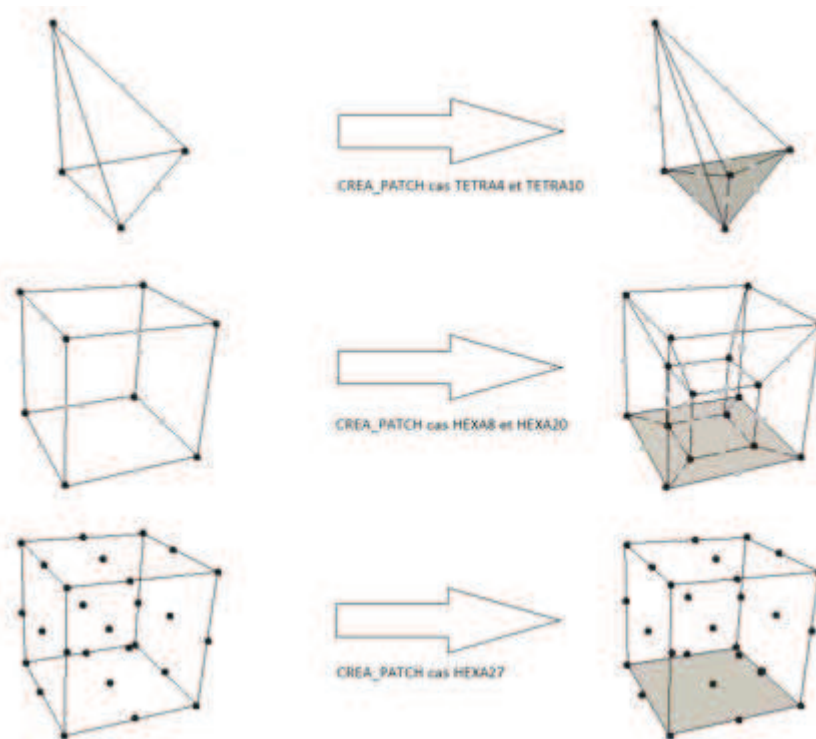


FIGURE 4.2 – Résultats de l'opérateur CREA_PATCH en 3D, les macro-maillages associés à chaque découpe sont grisés.

4.1.2.4 Quelques remarques sur le découpage

La fonctionnalité CREA_PATCH de l'opérateur doit être capable de traiter :

- différents types de maille à l'intérieur d'une même zone de contact,
- le multi-zone de contact,
- le cas des mailles "pathologiques" qui possèdent plusieurs éléments de peau dans la même zone de contact ce qui oblige à effectuer un découpage particulier.

La première version de l'implémentation de la méthode répond déjà aux deux premiers points.

Concernant la complexité des calculs sur le nouveau maillage, on remarque que l'on rajoute un certain nombre de nœuds qui porteront des DDL et potentiellement des lagrangiens de contact. Soit M le nombre de mailles de la surface esclave de la zone de contact considérée, alors pour des maillages (de corps) en :

- **TRIA 3** on ajoute M nœuds et $2M$ mailles,
- **QUAD 4** on ajoute $4M$ nœuds et $5M$ mailles,
- **TETRA 4** on ajoute M nœuds et $4M$ mailles,
- **TETRA 10** on ajoute $5M$ nœuds et $4M$ mailles,
- **HEXA 8** on ajoute $8M$ nœuds et $9M$ mailles,
- **HEXA 20** on ajoute $28M$ nœuds et $9M$ mailles.

De plus l'aspect ratio et la configuration des mailles générées peuvent éventuellement parasiter le post-traitement de certaines données sur la surface esclave (éléments de peau et éléments de corps en contact). Il sera donc envisageable d'effectuer une opération de restriction des résultats sur le maillage utilisateur après résolution du problème sur le maillage de calcul.

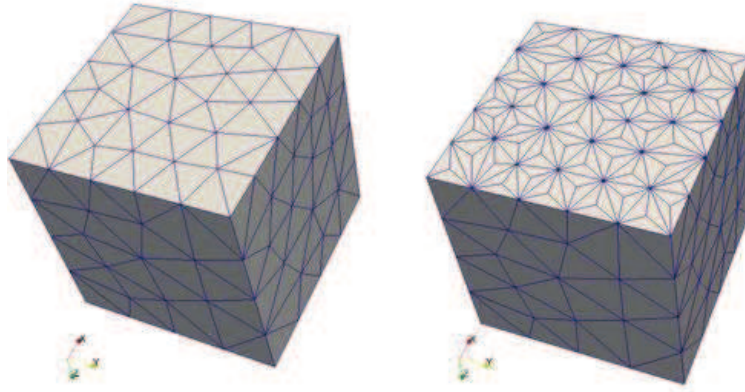


FIGURE 4.3 – Résultat de l'opérateur `CREA_PATCH` en 3D sur une face d'un cube maillée en **TETRA 4**.

4.2 Opérateur `DEFI_CONTACT`, définition des espaces fonctionnels

Cet opérateur doit prendre en compte la nouvelle définition des lagrangiens de contact, *i.e.*, l'espace $P^0(T^M)$. Il faut ajouter pour chaque macro-maille de la surface LAC un Lagrangien de contact (voir Figure 4.4) sachant qu'il n'est pas possible pour **Code_Aster** d'affecter un DDL à une autre entité physique qu'un nœud. Une première approche consisterait à créer des nouvelles mailles géométriques contenant un nœud milieu associé à une fonction de forme de type P^0 . Cette option est lourde en développement, elle impose la

création d'un nouveau type de maille, complique les opérations de post-traitement et elle nécessite un double appariement LAC-maître et LAC-esclave. On va présenter dans ce chapitre une astuce permettant de définir l'espace $P^0(T^M)$ localement sur chaque maille de calcul sous réserve de disposer d'un assemblage intelligent du système matriciel.

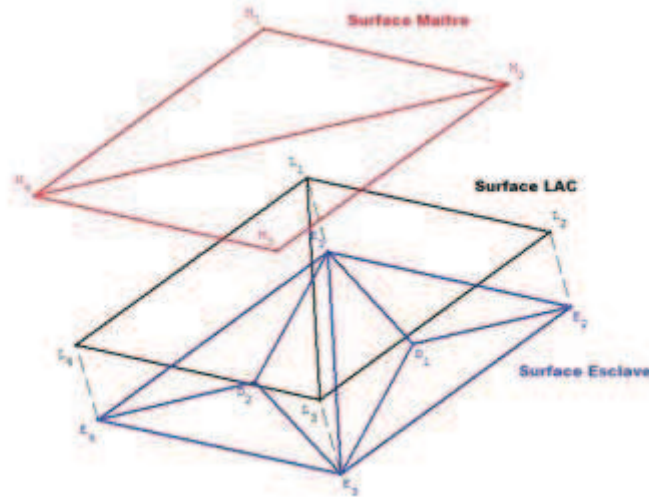


FIGURE 4.4 – Les trois espaces de la zone de contact (Maitre, Esclave et LAC).

4.2.1 Illustration de la technique sur le cas TRIA 3

L'astuce réside dans le fait que l'on sait pour chaque maille de la zone de contact esclave du maillage donné par CREA_PATCH quel est le numéro local (dans la connectivité) du nœud interne de la macro-maille, voir Figure 4.5. On sait donc sur quel nœud on doit ajouter



FIGURE 4.5 – Numérotation locale du maillage de calcul, cas **TRIA 3** (obtenue par CREA_PATCH).

le DDL LAG_C , *i.e.* le degré de liberté correspondant au multiplicateur de Lagrange P^0 , (voir Figure 4.6). Le numéro local du nœud portant le DDL LAG_C étant fixe on peut définir un seul nouveau type d'élément permettant de prendre en compte la localisation du LAG_C . Chaque degré de liberté LAG_C est bien commun uniquement à trois éléments,

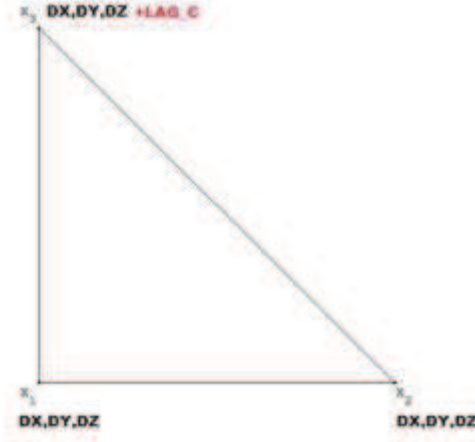


FIGURE 4.6 – Attribution des degrés de liberté sur chaque nouvelle maille de contact esclave **TRIA 3**.

les trois éléments composant la macro-maille. Étant donné que la fonction de base P^0 associée au multiplicateur de Lagrange de contact ne dépend pas des sommets géométriques de la macro-maille, on peut découper le calcul élémentaire sur la macro-maille en calcul élémentaire sur chaque maille la composant. Lors de l'assemblage, on somme les contributions de chaque maille sous-jacente à la macro-maille. Donc en attribuant à chaque DDL LAG_C une fonction de base localement constante sur l'élément, on obtient bien que les DDL LAG_C correspondent à l'espace $P^0(T^M)$.

4.2.2 Illustration des difficultés sur le cas QUAD 4

Le cas d'une interface de contact esclave maillée en **QUAD 4** permet de mettre en évidence toutes les difficultés que cette astuce peut engendrer, à savoir :

- différentes localisations locales du nœud associé au DDL LAG_C ,
- démultiplication du DDL LAG_C , provenant du fait que l'on ne dispose pas d'un DDL LAG_C commun à toutes les mailles sous-jacentes à la macro-maille.

La deuxième difficulté vient du fait que l'on a opté dans le cas **HEXA 8** pour un découpage "conforme" en 6 **HEXA 8**, voir Figure 4.7.

Ne disposant pas d'un DDL LAG_C commun à toutes les mailles sous-jacentes à la macro-maille, on doit créer localement 4 LAG_C portés par chaque DDL ajouté. On remarque alors la première difficulté. Il y a deux sortes de mailles sous-jacentes à la macro-maille, voir Figure 4.8 :

- 4 mailles portant 2 DDL LAG_C ,
- 1 maille portant les 4 DDL LAG_C .

Remarque 4.3. La première difficulté impose la création de 5 catalogues de `type_elem`, *i.e.* la description du type et de l'emplacement des DDL sur un support géométrique, (3

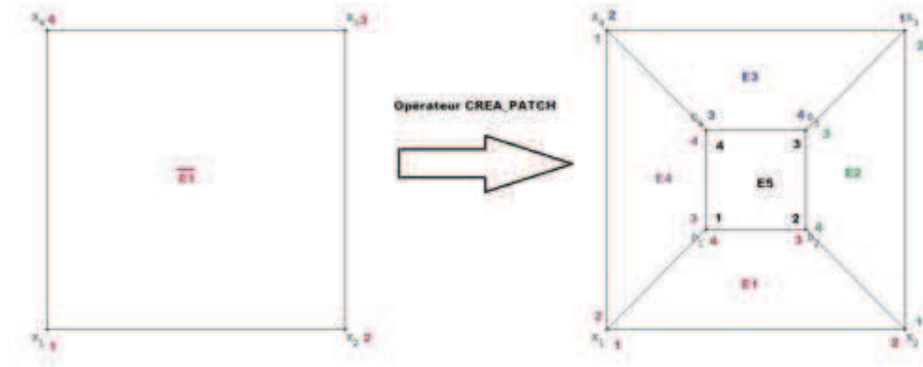


FIGURE 4.7 – Numérotation locale du maillage de calcul, cas **QUAD 4** (obtenu par `CREA_PATCH`).

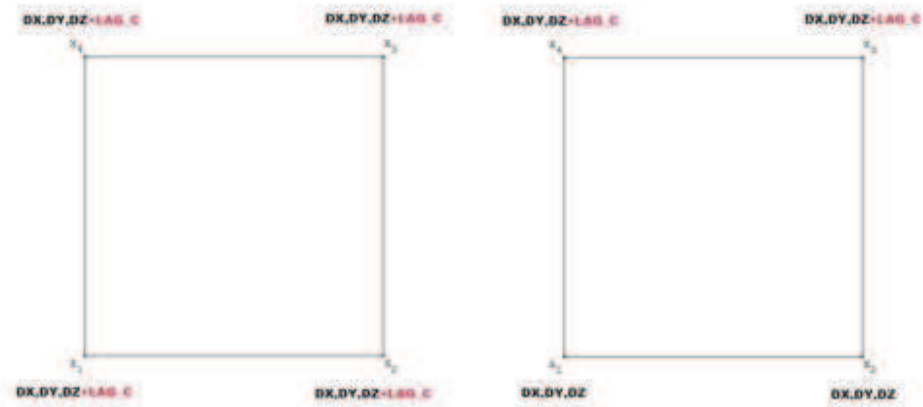


FIGURE 4.8 – Attribution des degrés de liberté sur les nouvelles mailles de contact esclave **QUAD 4** (type $E5$ à gauche et types $E1, E2, E3$ et $E4$ à droite).

en 2D et 2 en 3D). En effet un catalogue bis (et ter en 2D) sera nécessaire pour pouvoir affecter des `type_elem` différents sur des mailles géométriques de même type.

4.2.2.1 Première difficulté

Il faut au cours de l'affectation des `type_elem` "tardifs" sur les mailles de contact esclaves savoir si la maille est de type $E5$ ou $E1, E2, E3, E4$ (voir Figure 4.7). Pour cela, il faut utiliser les informations de la collection `.PATCH` du maillage. On va donc boucler sur les macro-mailles puis sur les mailles sous-jacentes sachant qu'elles sont ordonnées de manière connue lors de la mise à jour du groupe de mailles définissant la surface esclave de la zone de contact considérée (par exemple $E1, E2, E3, E4$ et $E5$).

4.2.2.2 Seconde difficulté

Elle sera traitée dans STAT_NON_LINE par l'utilisation d'un assemblage intelligent. Lors de l'assemblage, on devra condenser les contributions dans un unique LAG_C , une connectivité sera nécessaire (construite à partir des données par la collection .PATCH du maillage), afin de bien imposer la condition de contact en moyenne locale sur chaque macro-maille T^m .

4.2.3 Les autres cas

4.2.3.1 Les TRIA 6

Ce cas est similaire au cas **TRIA 3**, voir Figure 4.9.



FIGURE 4.9 – Attribution des degrés de liberté sur chaque nouvelle maille de contact esclave **TRIA 6**.

4.2.3.2 Les QUAD 8

Ce cas est similaire au cas **QUAD 4**, cependant on affecte pas de DDL LAG_C aux nœuds milieux (voir Figure 4.10).

4.2.3.3 Les SEG 2

On doit différencier ce cas en deux sous-cas, le premier pour les **SEG 2** issus de **TRIA 3** et le second pour ceux issus de **QUAD 4**. Ces cas sont similaires au cas **QUAD 4**, en effet, comme l'on doit conserver l'orientation des mailles, on ne peut pas ordonner librement les nœuds dans la connectivité du maillage issue de l'opération CREA_PATCH. Pour les **SEG 2/TRIA 3**, il existe deux `type_elem` (voir Figures 4.11 et 4.12), alors que pour les **SEG 2/QUAD 4**, il existe trois `type_elem` (voir Figures 4.13 et 4.14).



FIGURE 4.10 – Attribution des degrés de liberté sur chaque nouvelle maille de contact esclave **QUAD 8** (type E5 à gauche et types E1, E2, E3 et E4 à droite).



FIGURE 4.11 – Numérotation locale du maillage de calcul, cas **SEG 2/TRIA 3** (obtenu par CREA_PATCH).



FIGURE 4.12 – Attribution des degrés de liberté sur les mailles de contact esclaves **SEG 2/TRIA 3**.

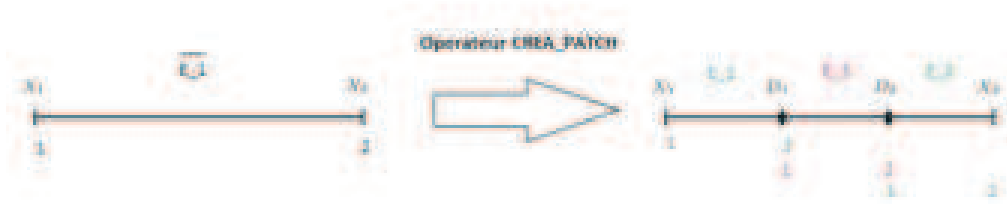


FIGURE 4.13 – Numérotation locale du maillage de calcul, cas **SEG 2/QUAD 4** (obtenue par CREA_PATCH).

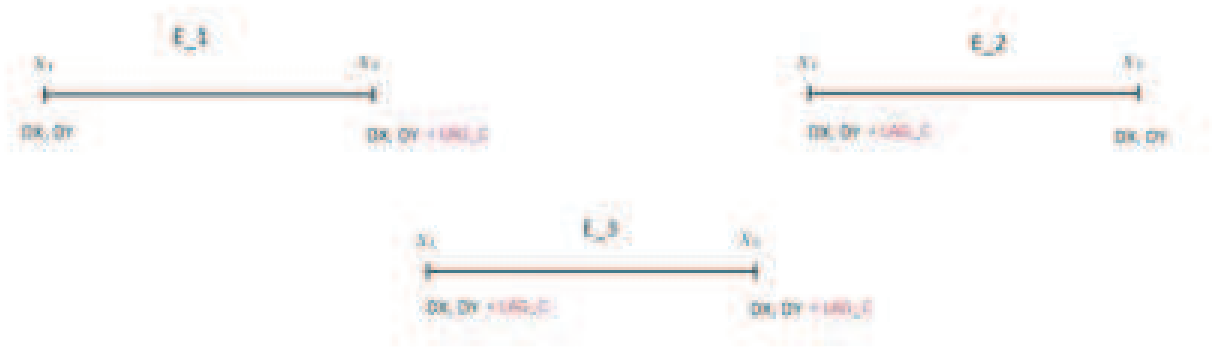


FIGURE 4.14 – Attribution des degrés de liberté sur les mailles de contact esclave **SEG 2/QUAD 4**.

4.2.3.4 Les SEG 3 ou QUAD 9

On a déjà remarqué que ces deux types de maille correspondent directement à des macro-mailles (les mailles et les macro-mailles sont confondues). Dans ce cas, on a donc un unique `type_elem` à affecter sur les mailles de contact **SEG 3** et **QUAD 9**, voir Figures 4.16 et 4.15.



FIGURE 4.15 – Attribution des degrés de liberté sur les mailles de contact esclave **SEG 3**.

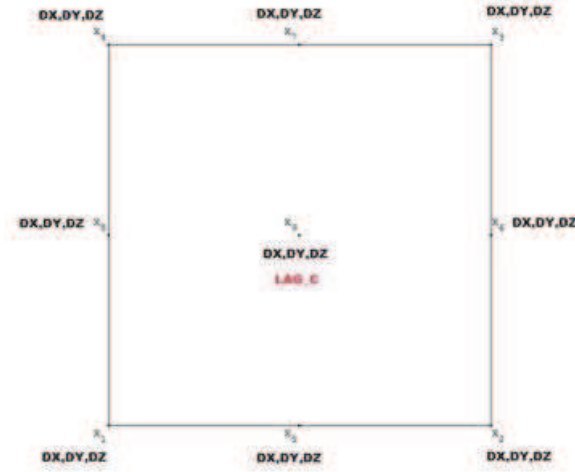


FIGURE 4.16 – Attribution des degrés de liberté sur les mailles de contact esclave **QUAD 9**.

4.3 Opérateur STAT_NON_LINE, construction et résolution du système

Il y a quatre impacts principaux dans cet opérateur :

- on doit développer un nouvel appariement de type “segment-segment” en 2D et de type “face-face” en 3D.
- on doit calculer des nouvelles matrices de contact (voir (3.52)),
- on doit développer un assemblage du système global intelligent (gestion de la deuxième difficulté liée à l’astuce dans **DEFI_CONTACT**), voir paragraphe 4.2.2.2,
- on doit choisir les algorithmes à utiliser pour gérer les différentes non-linéarités (géométrie, contact, géométrie de contact), *i.e.*, point fixe, contraintes actives, quasi Newton, full Newton.

Les deux premiers points nécessitent un outil d’intersection de mailles efficace et robuste dans le cas de mailles droites (linéaire et quadratique) et dans le cas de mailles courbes (quadratiques).

Remarque 4.4. Pour simplifier, on peut être en présence de trois types de non-linéarités (quatre en incluant la possible non-linéarité de comportement lié à l’objet) : la non-linéarité géométrique (grands déplacements), la non-linéarité de contact (inéquation) et la non-linéarité géométrique de contact (même à statuts de contact fixes et en petits déplacements, les supports d’intégration dans les calculs élémentaires des matrices de contact dépendent du déplacement).

4.3.1 Algorithme de résolution des non-linéarités liées au contact

On opte pour l’utilisation d’un algorithme de type Newton généralisé, gérant la non-linéarité géométrique, la stratégie de type contraintes actives pour la non-linéarité de contact et la non linéarité de comportement à l’intérieur de la même boucle de Newton. Ce cadre algorithmique est déjà présent dans *Code_Aster*. Il sera donc suffisant de remplacer

toutes les briques internes de l'algorithme pour implémenter la nouvelle méthode.

On pose :

$$U = \begin{bmatrix} U_N \\ U_M \\ U_E \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{NN} & K_{NM} & K_{NE} \\ K_{MN} & K_{MM} & K_{ME} \\ K_{EN} & K_{EM} & K_{EE} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ C^M \\ C^E \end{bmatrix}.$$

En prenant en compte le “jeu intégré” initial \overline{G}_0 , le problème (3.52) est équivalent à :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} K & C \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U \\ \Lambda \end{bmatrix} = F, \\ {}^tCU \leq \overline{G}_0 \text{ dans } \mathbb{R}^k, \\ \Lambda \leq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^k, \\ {}^tCU.\Lambda = 0 \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.1)$$

On introduit la fonction suivante :

$$A(U, \Lambda) = \Lambda + \max(0, \rho(CU - \overline{G}_0) - \Lambda), \quad \forall \rho > 0.$$

On peut alors montrer que (4.1) est équivalent à :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} K & C \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U \\ \Lambda \end{bmatrix} = F, \\ A(U, \Lambda) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

La résolution de la non-linéarité de contact revient alors à la recherche des contraintes actives, *i.e.*, les $S\Lambda_i = 1$. On obtient l'algorithme global intitulé Algorithme 1.

4.3.2 Appariement

Le but de cette brique de l'opérateur est de gérer la non-linéarité géométrique du problème et celle issue de possibles grands déplacements. Pour chaque maille de contact esclave, on cherche les mailles maîtres susceptibles de communiquer avec la maille esclave. On doit aussi lors de cette opération calculer le “jeu” moyen entre les deux surfaces pour chaque macro-maille. Pour ce faire, on va utiliser quatre outils :

- un outil de recherche de complexité linéaire utilisant l'information de voisinage au niveau des arêtes,
- un outil de projection de deux mailles sur le même plan de référence (espace paramétrique de référence de la maille esclave),
- un outil d'intersection de mailles planes,
- un outil de calcul de distance moyenne entre un triangle et une surface (cas 3D) ou entre deux segments (cas 2D).

Algorithm 1 Newton généralisé pour le contact

```

1: Appariement initial  $\rightarrow \overline{G_0}$ 
2: for  $i = 1..dim(\Lambda)$  do
3:   if  $\overline{G_{0i}} \leq 0$  then
4:      $S\Lambda_i^0 = 0$ 
5:   else
6:      $S\Lambda_i^0 = 1$ 
7:   end if
8: end for
9:  $k=1$ 
10: while  $S\Lambda^k \neq S\Lambda^{k+1}, \forall k$  and  $\|r\|_2 \geq tole$  do
11:   Calcul des matrices de rigidité et des seconds membres élémentaires.
12:   Calcul des matrices et des seconds membres de contact élémentaires :
13:   for  $i = 1..dim(\Lambda)$  do
14:     if  $S\Lambda_i^k = 1$  then

$$\begin{bmatrix} 0 & C_k^E & 0 \\ {}^tC_k^E & 0 & {}^tC_k^M \\ 0 & C_k^M & 0 \end{bmatrix}$$

15:     else

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

16:     end if
17:   end for
18:   Assemblage du système global
19:   Résolution :

$$\begin{bmatrix} J_k^K & C_k & 0 \\ {}^tC_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta U_k \\ \Delta \Lambda_k^a \\ \Delta \Lambda_k^{na} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_k \\ \overline{G_k} \\ -\Delta \Lambda_{k-1} \end{bmatrix}.$$

20:   Mise à jour :
21:    $U_{k+1} = U_k + \Delta U_k$ 
22:    $\Lambda_{k+1} = \Lambda_k + \Delta \Lambda_k$ 
23:   Appariement sur la géométrie actualisée  $\rightarrow \overline{G_{k+1}}$ 
24:   Evaluation des nouveaux statuts
25:   for  $i = 1..dim(\Lambda)$  do
26:     if  $\Lambda_{k+1i} + \rho G_{k+1i} \leq 0$  then
27:        $S\Lambda_i^{k+1} = 1$ 
28:     else
29:        $S\Lambda_i^{k+1} = 0$ 
30:     end if
31:   end for
32:   Calcul du résidu :  $r_{k+1}$ 
33: end while

```

4.3.2.1 Algorithme de recherche de complexité linéaire

On propose d'adapter au cas du contact l'algorithme PANG de calcul de matrice de projection "mortar" pour la décomposition de domaine introduit dans [34]. Cet algorithme est de complexité linéaire dès lors que l'on a trouvé un couple de mailles de départ. Il utilise une recherche restreinte sur les mailles voisines maîtres des mailles maîtres intersectant une maille esclave. De plus, il utilise les informations de voisinage au niveau des mailles esclaves pour mettre à jour la liste des couples de mailles de départ. L'algorithme est décrit dans la Figure 4.17. Cet algorithme permet un gain de temps important par rapport à un appariement de type force brute (*i.e.*, double boucle d'appariement maître-esclave). Cependant, il manque de robustesse. Dans le cas de zone d'appariement possédant plus d'une composante connexe, il est mis en échec. En effet, on détecte alors une seule des zones d'appariement et l'algorithme de contact est dès lors mis en échec. On propose une version plus robuste mais plus coûteuse de l'algorithme initial en lui associant une recherche récursive de couples de mailles de départ par force brute, voir Figure 4.18.

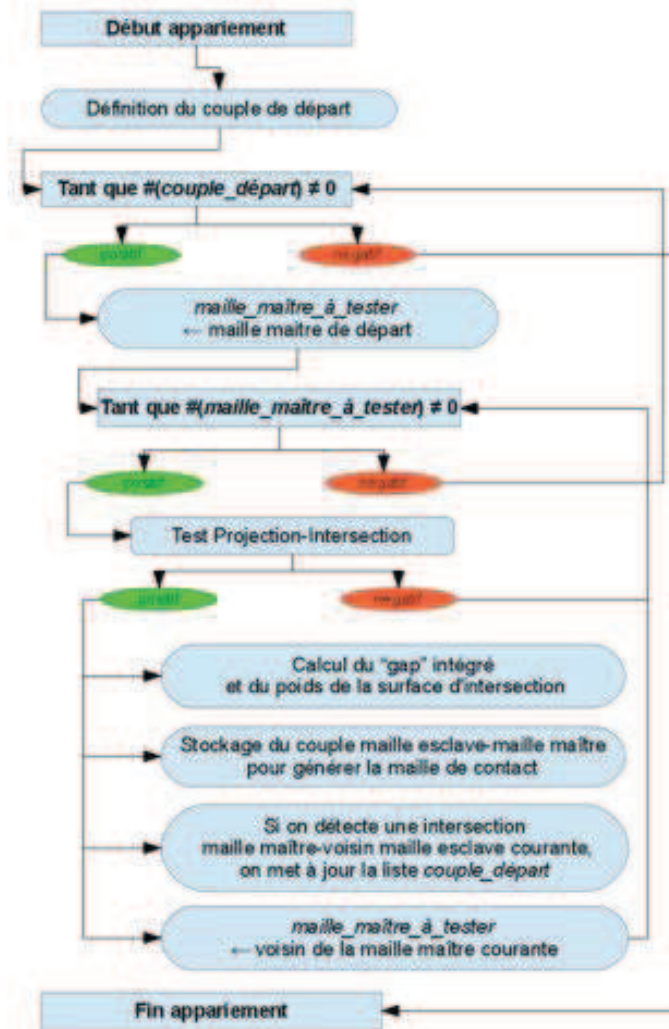


FIGURE 4.17 – Algorithme d'appariement de complexité linéaire

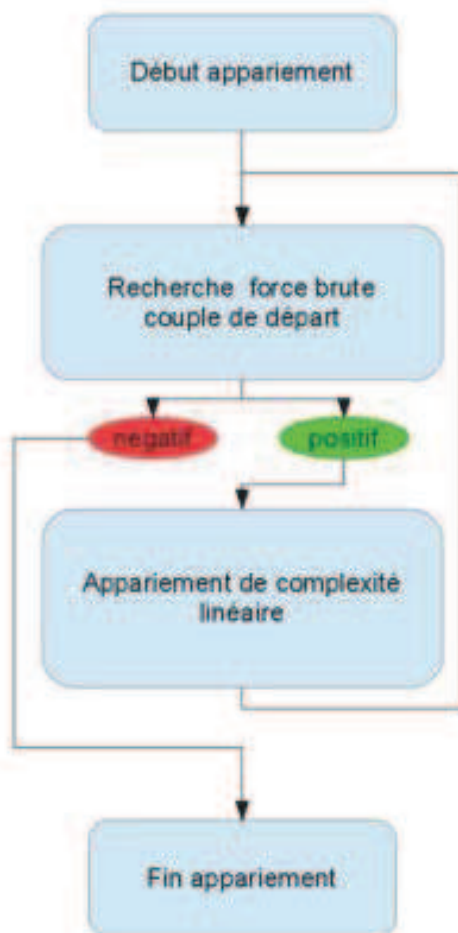


FIGURE 4.18 – Algorithme d'appariement version robuste

4.3.2.2 Outil de projection

Cet outil est déjà disponible dans *Code_Aster*. En effet, un des outils de l'appariement de la méthode Continue `mmnewt.f90` effectue la projection orthogonale d'un point de l'espace réel dans l'espace paramétrique d'une maille donnée. On va donc pouvoir projeter n'importe quelle maille maître dans l'espace paramétrique de la maille esclave afin de réaliser le test d'intersection.

On remarque deux points importants :

- dans un premier temps, on limitera la phase de développement au cas où la projection de la maille maître dans l'espace paramétrique esclave est convexe,
- étant donné que l'on effectue la projection dans l'espace paramétrique de la maille maître, on réalisera uniquement une intersection purement 1D ou 2D.

De plus, une autre routine est disponible dans *Code_Aster* : la projection sous une direction imposée. On note que cet algorithme de projection sera utile pour l'outil "jeu" moyen.

4.3.2.3 Outil “jeu” moyen

On introduit cet outil dans le cas 2D décrit dans la Figure 4.19. Le maillage esclave est constitué de deux mailles (E1, E2) et donc 1 macro-maille associée à un DDL LAG_C ; le maillage maître est lui aussi constitué de deux mailles (M1, M2).

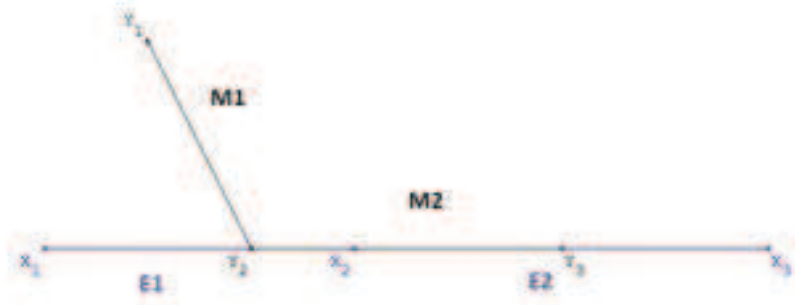


FIGURE 4.19 – Configuration 2D étudiée, en noir les mailles maîtres M1 et M2 , en bleu les mailles esclaves E1 et E2

En combinant les outils de projection et d’intersection, on obtient les mailles de contact décrites dans la Figure 4.20. On va décrire l’outil de jeu moyen sur la première maille de contact.

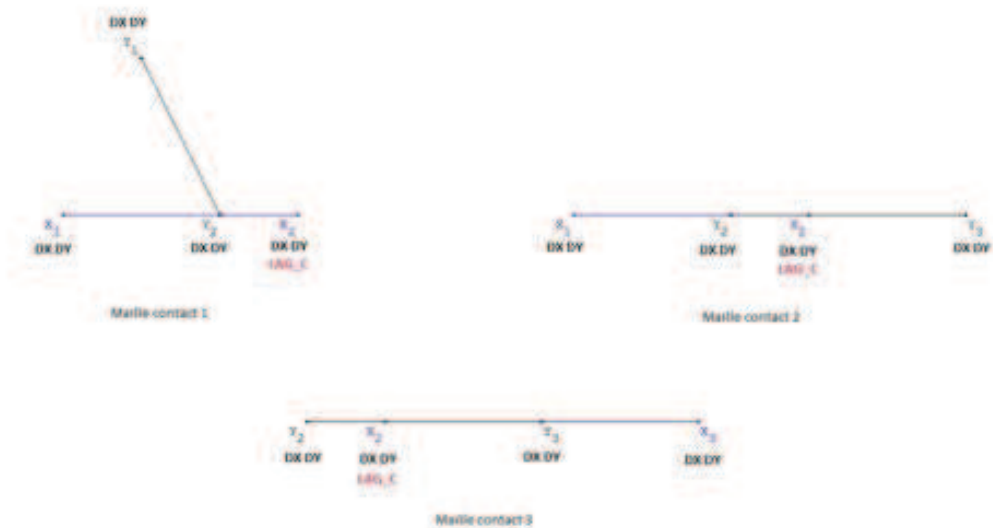


FIGURE 4.20 – Mailles de contact obtenues par les deux premières opérations de l’appariement

Si l’on effectue les opérations projection sur la maille esclave et intersection, on obtient les

projetés des points Y_1 et Y_2 dans l'espace de référence de la maille esclave E1, respectivement P_1 et P_2 , et l'intersection (segment bleu). Le résultat de ces opérations est décrit dans la Figure 4.21 .



FIGURE 4.21 – Projection et intersection dans l'espace de référence de la maille esclave E1

En considérant l'intersection comme un pseudo élément, on peut rapporter les points de Gauss issus d'une formule de quadrature dans l'espace de référence de la maille esclave. On considère ici par simplicité une formule de quadrature à un point de Gauss Pg ; son poids associé est la poids de l'intersection (voir Figure 4.22).



FIGURE 4.22 – Point de Gauss, Pg , lié à l'intersection dans l'espace de référence de la maille esclave E1.

On retourne alors dans l'espace réel pour pouvoir estimer la distance aux points de Gauss. On va utiliser les sous-routines de *Code_Aster* suivantes :

- `reere1.F90`, retour dans l'espace réel,
- `mmnewd.F90` projection sur la maille maître des points de Gauss selon la direction de la normale sortante esclave,
- `apdist.F90` pour connaître le “jeu” à chaque point de Gauss.

Ces opérations sont décrites dans les Figures 4.23 et 4.24.

FIGURE 4.23 – Point de Gauss, Pg , dans l'espace réel de la maille de contact.FIGURE 4.24 – Jeu au point de point de Gauss, d .

On ajoute la contribution suivante dans la composante du vecteur “jeu intégré”, \overline{G} , correspondant au DDL LAG_C de la maille de contact,

$$\overline{G}_{LAG_C} = \overline{G}_{LAG_C} + \sum_{i=1}^N d_i \cdot p_i \cdot \|(\partial_1 \sigma \times \partial_2 \sigma)(Pg_i)\|_2,$$

où d_i est le jeu signé au i -ème point de Gauss (Pg_i), p_i est le poids associé au i -ème point de Gauss dans l'espace de référence de la maille maître de la maille de contact, σ est la transformation de passage élément de référence élément réel et N est le nombre de points de Gauss définis sur l'intersection.

Par itération sur les mailles de contact, on obtient le vecteur \overline{G} dont la dimension correspond au nombre de DDL LAG_C ; dans notre exemple il n'y a une seule composante dans le vecteur “jeu” intégré.

Remarque 4.5. Dans le cas 3D, un outil de triangulation de polygone convexe est nécessaire. En effet, il est plus aisé de calculer le “jeu” intégré par morceaux sur un ensemble de triangles (définition plus simple des formules de quadrature que sur un polygone quelconque).

Remarque 4.6. Par souci de simplicité, on a présenté cet outil à partir du résultat de l'appariement. Cependant, il sera directement introduit dans l'opérateur d'appariement, dès qu'une projection-intersection non vide est détectée.

Pour finir l'opération il suffit de diviser chaque composante du vecteur "jeu" intégré par le poids d'intersection trouvé sur la macro-maille associée.

4.3.2.4 Conclusion

Une fois l'appariement terminé, on peut créer les éléments "tardifs" correspondants (mailles de contact). Le "jeu" initial sert à initialiser l'algorithme de résolution de type contraintes actives. Les Figures 4.25, 4.26 et 4.27 présentent les premiers résultats de l'implémentation des routines liées à l'appariement sous *Code_Aster*.

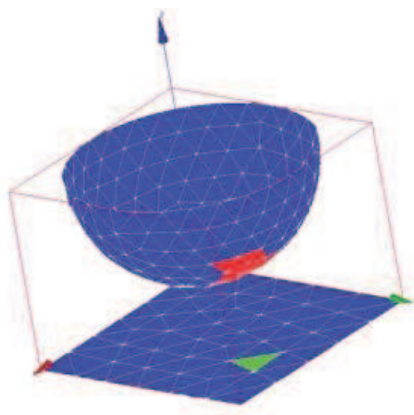


FIGURE 4.25 – Appariement Cube-Sphère (Esclave-Maître)(1/2)

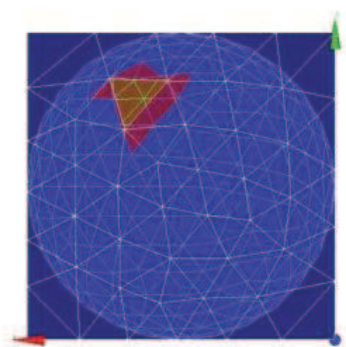


FIGURE 4.26 – Appariement Cube-Sphère (Esclave-Maître)(2/2)

Remarque 4.7. On se place dans le cas d'un maillage en tétraèdres à 4 nœuds, la zone de contact est alors maillée en **TRIA 3**. Il existe un statut pour chaque DDL LAG_C et chacun de ces DDL est lié à trois mailles de contact esclaves. Il y a deux statuts principaux, soit il y a contact, soit non contact (calculé en fonction de la condition de contact intégrée). On note que le statut de non contact est découpé en deux sous-statuts. En effet, soit au moins un des trois **TRIA 3** associé à un DDL LAG_C est apparié, il y a alors une maille de contact liée à ce DDL LAG_C et on peut avoir accès à une valeur du "jeu" moyen ; ou bien aucune des mailles liées au DDL LAG_C n'est appariée et alors aucune maille de

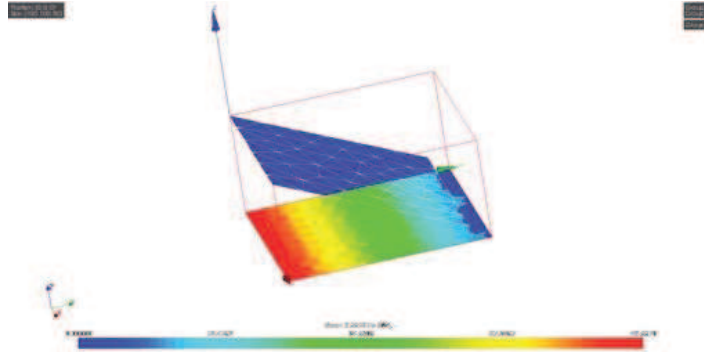


FIGURE 4.27 – Jeu intégré normalisé par la surface d'intégration effective (jeu moyen)

contact n'est générée. Le calcul élémentaire aboutit sur une ligne de zéros dans la matrice. En effet, les DDL de contact sont créés dans l'opérateur `DEFI_CONTACT` une fois pour toutes avant le calcul et sont activés selon la condition de contact dans l'opérateur `STAT_NON_LINE` (mailles de contact). Jusqu'à présent, dans le cadre de la méthode Continue, chaque DDL `LAG_C` a toujours été apparié ce qui n'est plus le cas. Cette situation nous oblige à créer un statut de non contact non apparié qui nous permettra de corriger les coefficients diagonaux de la matrice assemblée correspondant aux DDL `LAG_C` non appariés ainsi que la composante du second membre associé.

4.3.3 Calcul des matrices de contact

Le calcul des matrices élémentaires de contact est dirigé par le champ de statuts SA (voir algorithme). Si la contrainte associée au macro-élément T est active, alors on doit calculer les contributions suivantes :

$$C_i^{M_{elem}} = \int_T \phi_i^M \vec{n}_m d\Gamma = \sum_{M_{CT}} \int_{M_m \cap M_e} \phi_i^M \vec{n}_m d\Gamma, \quad (4.3)$$

$$C_i^{E_{elem}} = \int_T \phi_i^E \vec{n}_e d\Gamma = \sum_{M_{CT}} \int_{M_m \cap M_e} \phi_i^E \vec{n}_e d\Gamma, \quad (4.4)$$

où ϕ^E et ϕ^M sont les fonctions de bases esclaves et maîtres, \vec{n}_e et \vec{n}_m les normales respectives, M_{CT} l'ensemble des mailles de contact, et M_E l'ensemble des mailles maîtres. Si la contrainte de contact associée au macro-élément T est inactive, alors il n'y a pas des conditions de contact à respecter sur ce macro-élément et l'on fixe à zéro le DDL `LAG_Ci` associé. Étant donné que la macro-maille T n'existe pas en tant qu'élément, on calculera des matrices "sous-élémentaires" au niveau des mailles de contact M_{CT} (association d'une maille de contact esclave et maître).

4.3.3.1 Calcul des matrices élémentaires de contact $C^{M(elem)}$

On calcule en fait les matrices élémentaires de contact correspondant aux intégrales sous la boucle sur les mailles de contact (voir (4.3) et (4.4)). Ces matrices élémentaires appartiennent à $\mathcal{M}_{1,N}$ et $\mathcal{M}_{1,M}$, où N est le nombre de DDL de déplacements maîtres de la maille de contact et M est le nombre de DDL de déplacements esclaves de la maille de

contact. Pour chaque maille de contact, on doit calculer les matrices suivantes :

$$C_i^{M_{elem}} = \int_{M_m \cap M_e} \phi_i^M \vec{n}_m d\Gamma,$$

$$C_i^{E_{elem}} = \int_{M_m \cap M_e} \phi_i^E \vec{n}_e d\Gamma,$$

où M_e est la maille esclave de la maille de contact et M_m est la maille maître de la maille de contact. Étant donné que la condition de contact choisie correspond à un jeu nul unique-ment en moyenne, on doit procéder à une projection-intersection pour définir le support d'intégration. Pour ce faire, on réutilise les outils présentés dans la section précédente. En suivant le schéma de l'outil jeu intégré, on arrive à obtenir les coordonnées et poids d'une formule de quadrature dans l'espace paramétrique de la maille esclave de la maille de contact (voir Figures 4.21 et 4.22). En bouclant sur les DDL de déplacements maîtres, on peut alors calculer les coefficients de la matrice $C_i^{E_{elem}}$. Puis en utilisant la projection sur l'espace paramétrique de la maille maître de la maille de contact (*mmnewd.F90*) on obtient alors le support d'intégration dans l'espace référence de la maille maître, ce qui permet de calculer (en définissant un schéma d'intégration) les coefficients de la matrice $C_i^{M_{elem}}$.

4.3.3.2 Choix de la normale

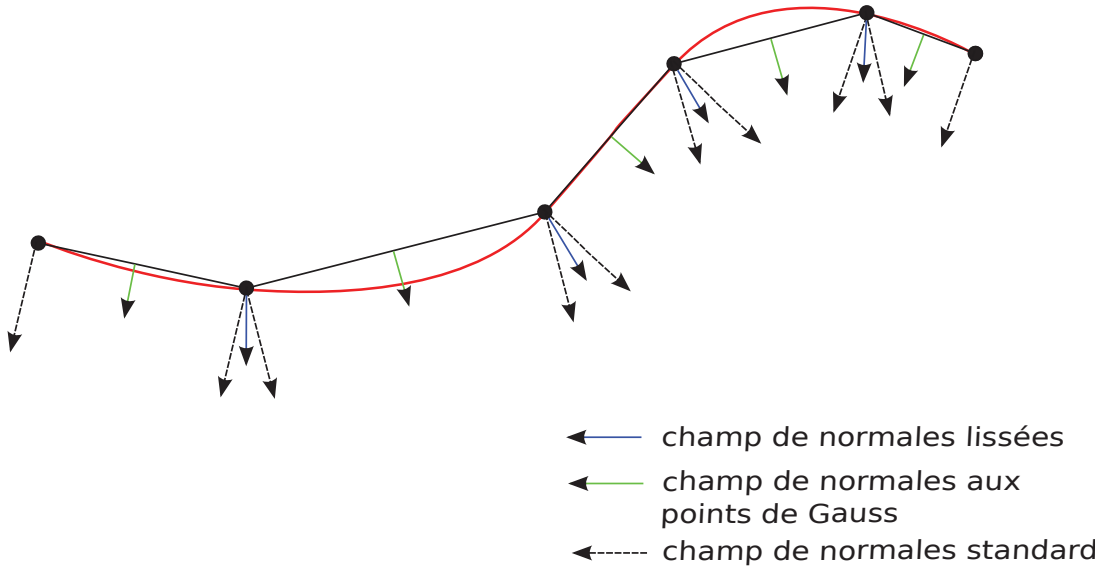


FIGURE 4.28 – Différents choix de champs de normale envisagés.

La question du choix de la normale n'a pas encore été abordée. Ce choix n'étant pas unique, on se propose d'utiliser dans notre cas deux types de normale. Soit on évalue la normale à chaque point de Gauss maître et esclave, soit l'on utilise un champ de normales lissées calculé sur chaque configuration déformée (maître et esclave). Ces deux choix permettent d'éviter le problème de définition multiple de la normale aux sommets des éléments lorsque l'on considère des géométries courbes. Dans le cas quadratique, ces deux choix sont relativement similaires. Au contraire dans le cas des maillages linéaires, le champ de normale

lissée permet de régulariser le champ des normales et de mieux approcher les géométries courbes, voir Figure 4.28.

4.3.4 Assemblage intelligent

Nous présentons ici une piste pour gérer la deuxième difficulté liée à l'astuce utilisée dans `DEFI_CONTACT`. On se situe dans le cas **HEXA 8** ; on veut calculer la matrice C^E (voir (3.52)) . On suppose que le maillage esclave est uniquement composé d'une macro-maille, il y a donc cinq mailles sur la surface esclave (pour simplifier nous ne parlerons que des contributions esclaves), 8 DDL de déplacement, 4 Lagrangiens de contact informatiques, mais un seul Lagrangien au sens mathématique. La Figure 4.29 représente le maillage esclave considéré. Les matrices élémentaires sont les suivantes :

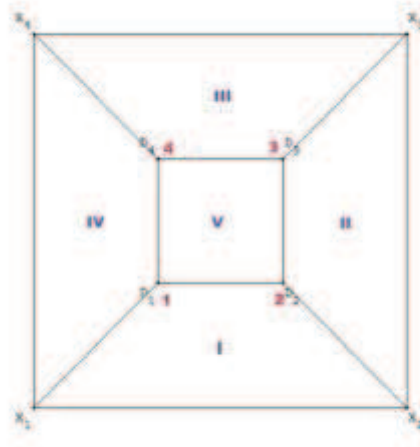


FIGURE 4.29 – Maillage esclave, en noir (X1,..., X4, D1,..., D4) les DDL de déplacement, en rouge (1, ..., 4)

– Élément I :

$$\begin{bmatrix} a_I & b_I & c_I & d_I \\ a_I & b_I & c_I & d_I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ D_2 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

– Élément II :

$$\begin{bmatrix} a_{II} & b_{II} & c_{II} & d_{II} \\ a_{II} & b_{II} & c_{II} & d_{II} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ D_3 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

– Élément III :

$$\begin{bmatrix} a_{III} & b_{III} & c_{III} & d_{III} \\ a_{III} & b_{III} & c_{III} & d_{III} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \\ D_4 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

– Élément IV :

$$\begin{bmatrix} a_{IV} & b_{IV} & c_{IV} & d_{IV} \\ a_{IV} & b_{IV} & c_{IV} & d_{IV} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_4 \\ X_1 \\ D_1 \\ D_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

– Élément V :

$$\begin{bmatrix} a_V & b_V & c_V & d_V \\ a_V & b_V & c_V & d_V \\ a_V & b_V & c_V & d_V \\ a_V & b_V & c_V & d_V \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Un assemblage classique nous donnerait la matrice globale C^E suivante :

$$\begin{bmatrix} a_I + b_{IV} & b_I & 0 & a_{IV} & a_V + c_I + c_{IV} & b_V + d_I & c_V & d_V + d_{IV} \\ a_I & a_{II} + b_I & b_{II} & 0 & a_V + c_I & b_V + d_I + d_{II} & c_V + c_{II} & d_V \\ 0 & a_{II} & b_{II} + a_{III} & b_{III} & a_V & b_V + d_{II} & c_V + c_{II} + d_{III} & d_V + c_{III} \\ b_{IV} & 0 & a_{III} & b_{III} + a_{IV} & a_V + c_{IV} & b_V & c_V + d_{III} & d_V + c_{III} + d_{IV} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

On remarque facilement que cette matrice ne correspond pas au couplage des déplacements avec les fonctions $P^0(T^M)$. On doit trouver une technique d'assemblage compatible avec l'assemblage utilisé dans *Code_Aster* (et qui ne doit pas être totalement incompatible avec le parallélisme) permettant d'obtenir la matrice de couplage suivante à la place de (4.10) :

$${}^t\mathbf{DEPL} \times \begin{bmatrix} a_I + b_{IV} \\ b_I + a_{II} \\ b_{II} + a_{III} \\ b_{III} + a_{IV} \\ a_V + c_I + c_{IV} \\ b_V + d_{II} + d_I \\ c_V + d_{III} + c_{II} \\ d_V + c_{III} + d_{IV} \end{bmatrix} = LAG_C \quad (4.11)$$

On veut donc lors de l'assemblage élémentaire multiplier les contributions par 0.5 dans le cas des éléments de type E1, E2, E3 et E4 (matrices élémentaires (4.5), (4.6), (4.7) et (4.8)) et par 0.25 dans le cas des éléments de type E5 (matrice élémentaire (4.9)). Ensuite pour chaque macro-élément, on somme les lignes correspondantes de la matrice globale du système et on garde uniquement un lagrangien dans le système correspondant à la condition de contact mathématique. Les trois lagrangiens informatiques supplémentaires sont fixés égaux au multiplicateur de Lagrange physique.

4.3.5 Remarque sur la convexité

Plusieurs outils développés dans ce chapitre utilisent fortement l'hypothèse de convexité, soit au niveau des mailles esclaves et maîtres, soit au niveau de l'intersection de la pro-

jection. Cette hypothèse est facilement respectée dans le cas de maillage non courbe ou dans le cas de l'utilisation de mailles linéaires planes. L'extension de ces outils au cas quadratique courbe demande un travail d'adaptation des outils exposés dans ce chapitre. On peut, dans les cas les plus pathologiques, perdre l'unicité de la projection `mmnewt.F90`, perdre la convexité de l'intersection, ce qui complique l'algorithme d'intersection en lui-même, et l'outil de triangulation. Des choix d'approche et d'approximation devront être pris pour pouvoir aborder ce problème et gérer tous les cas pathologiques.

4.3.6 Gestion des maillages quadratiques

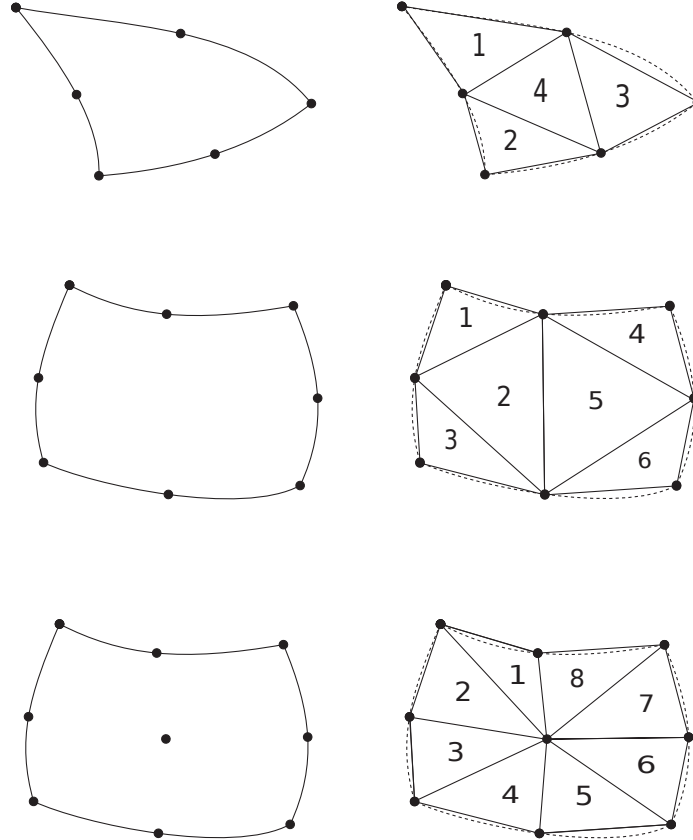


FIGURE 4.30 – Approximation géométrique des éléments maîtres.

Dans le cas quadratique courbe, on ne peut pas approcher la géométrie de la maille maître dans l'espace paramétrique esclave. Pour approcher au mieux la géométrie maître, on va utiliser une décomposition de la maille en éléments linéaires, voir Figure 4.30. Ce type de stratégie est couramment utilisée dans la littérature des méthodes “mortar” pour le contact voir [67]. La géométrie esclave est quant à elle approchée de manière exacte par son espace paramétrique. Contrairement à l'approche courante consistant à utiliser un plan auxiliaire d'intersection (définie à partir de la surface esclave), on a choisi de réaliser toute les opérations de projection et d'intersection dans l'espace paramétrique esclave. Ce choix permet à la fois l'utilisation d'un critère de tolérance d'appariement indépendant de la modélisation et de réaliser uniquement des intersections purement 2D ou 1D. En utilisant cette approche et en contrôlant la qualité du maillage, on prévient l'apparition des

cas pathologiques sévères qui aboutissent à des erreurs fatales ou sur une non-convergence de l'algorithme de Newton généralisé. De plus, contrairement aux méthodes “mortar classiques” P^2/P^2 la méthode LAC n'est pas confrontée au problème de signe vis à vis des fonctions de base de l'espace des multiplicateurs de Lagrange. L'attention devra donc être principalement portée au niveau de la qualité du maillage, et plus particulièrement du maillage de la surface esclave. En effet, les choix algorithmiques mis en œuvre dans cette première version de l'implémentation de la méthode ne prennent pas en compte le cas d'intersections non convexes. Si les mailles esclaves ne respectent pas cette contrainte, on obtient des intersections non pertinentes, on observe dès lors des coefficients d'intersections aberrants (supérieurs à 1) ce qui aboutit à un échec de convergence de l'algorithme de résolution du problème.

4.3.7 Post-traitement

Toutes les variables de résolution du contact, statuts, multiplicateurs de Lagrange, “jeu”, sont uniquement pertinentes au niveau de la macro-maille. On doit donc modifier la structure de donnée résultat en sortie de l'opérateur `STAT_NON_LINE` afin d'observer correctement ces variables. En effet, actuellement les variables de contact sont strictement nodales et sont donc restituées sous forme d'un champ de résultat nodal, de type `cham_no`. Dans le cadre de la méthode LAC, on va introduire un nouveau champ de sortie supplémentaire, sous la forme d'un champ constant par élément à plusieurs composantes, de type `cham_elem`. Étant donné que la macro-maille n'existe pas en tant que maille physique, elle est uniquement accessible par ses sous-mailles. Chaque sous-maille d'une même macro-maille restitue alors les mêmes valeurs pour les différentes variables de résolution du contact présentes dans le champ résultat constant par élément. Ainsi, on visualise bien un champ de type $P^0(T^M)$ correspondant à l'espace fonctionnel traitant le contact.

4.4 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre les premières pistes empruntées lors de l'implémentation d'une maquette de la méthode LAC dans *Code_Aster* (principalement dans le cas d'intersection convexe). La plus grande partie du travail a été réalisée dans l'opérateur `STAT_NON_LINE` où il a été nécessaire de réécrire toutes les briques de l'algorithme de Newton généralisé dans le formalisme de la méthode LAC. Cette maquette permet donc de réaliser une première série de tests pour confirmer les résultats théoriques (taux de convergence et stabilité) et d'analyser le comportement de la méthode vis à vis des maillages incompatibles. On pourra ainsi vérifier qu'elle permet d'obtenir des résultats d'aussi bonne qualité que ceux obtenus par les méthodes de type “mortar” dans la littérature.

Chapitre 5

Validation numérique “académique”

Les objectifs de ce chapitre sont de valider la méthode “LAC” qualitativement et quantitativement, de comparer les résultats obtenus avec ceux issus d’une méthode de type “collocation”, la méthode Continue de *Code_Aster* et finalement valider les taux de convergence théoriques. Pour ce faire, nous allons, dans un premier temps, analyser les résultats obtenus avec la première version de l’implémentation de la méthode (branche de développement personnelle traitant le cas quasi-statique en formulation Newton généralisé) sur une batterie de cas tests “académiques” en maillages incompatibles et sous hypothèses HPP. Cette première version de développement est à même de gérer les cas suivants : les maillages 3D en tétraèdres à 4 et 10 nœuds, en hexaèdres à 8, 20 et 27 nœuds et les maillages 2D en triangles à 3 et 6 nœuds, en quadrangles à 4 et 8 nœuds. On note que ce sont les éléments majoritairement utilisés dans les études de l’ingénierie. On comparera ces résultats avec ceux obtenus par la méthode Continue utilisant l’algorithme de Newton généralisé et un schéma d’intégration nodal. Dans cette configuration, la méthode Continue s’apparente à une méthode de type “collocation”. Elle possède donc toutes les limitations dues à cette approche dans le cas général des maillages incompatibles. Finalement, on utilisera la méthode des solutions manufacturées et le problème du contact de Hertz en 2D et 3D pour valider numériquement les taux de convergence théoriques de la méthode LAC.

5.1 Analyse qualitative et quantitative comparative entre la méthode LAC et une méthode de type “collocation” :

5.1.1 Présentation des cas tests

Les quatre problèmes considérés dans cette batterie de cas tests permettent d’aborder le contact plan jusqu’au contact courbe en passant par la gestion de la transition contact non-contact et cela dans le cas général des maillages incompatibles. Les tests considérés sont les suivants : le patch test de Taylor, le problème d’une poutre en flexion en contact sur une poutre encastree, le contact de Hertz, et finalement l’inclusion de deux sphères creuses sous pression interne.

5.1.1.1 Patch test de Taylor

Ce problème est un des tests de référence en mécanique du contact, voir [74]. D'apparence très simple, il ne fait intervenir que du contact plan établi sans transition contact non-contact, il devient discriminant dans le cas général des maillages incompatibles. En effet, dans ce cas général, ce test est connu pour faire échouer les méthodes de type “collocation” alors que les méthodes de type “mortar” avec intégration exacte le passent avec succès. On s'attend donc à observer un bon comportement pour la méthode LAC et un échec pour la méthode Continue.

Configuration du test en 2D :

On considère deux carrés de côté $50mm$ (voir Figure 5.1) composés du même matériau (module de Young $E = 2000MPa$; coefficient de Poisson $\nu = 0.3$). On applique une condition de symétrie sur l'axe \vec{Oy} , et sur la base du carré inférieur et une pression de $25MPa$ sur le haut du cube supérieur. Les carrés seront maillés de manière incompatible pour tous les éléments considérés.

Les résultats attendus sont un champ de déplacement vertical linéaire et continu à travers la surface de contact,

$$u_y(x, y) = \alpha y + \beta,$$

avec $\alpha = 0.0125$ et $\beta = 0.625mm$, une distribution de la composante σ_{yy} du tenseur des contraintes de Cauchy homogène dans les deux objets ainsi qu'une pression de contact (multiplicateur de Lagrange) constante (égale à la pression appliquée),

$$\lambda(x, y) = \sigma_{yy}(x, y) = -25MPa.$$

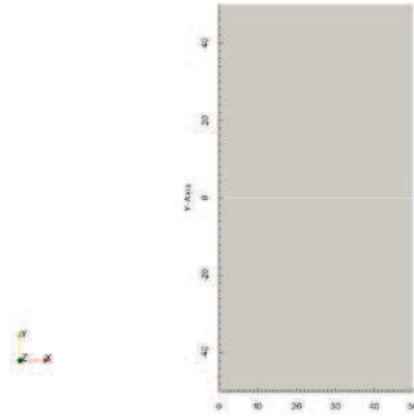


FIGURE 5.1 – Configuration du patch test de Taylor en 2D

Configuration du test en 3D :

On considère deux cubes de mêmes dimensions ($50mm \times 50mm \times 50mm$, voir Figure 5.2) composés du même matériau (module de Young $E = 2000MPa$; coefficient de Poisson $\nu = 0.3$). On impose des conditions de symétrie sur les faces \vec{OxOz} , \vec{OyOz} , et sur la base du cube inférieur et une pression de $25MPa$ sur la face supérieure du cube supérieur. Les cubes seront maillés de manière incompatible pour tous les éléments considérés.

Les résultats attendus sont similaires à ceux du cas 2D.

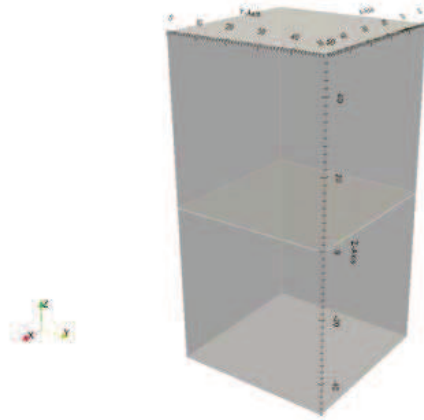


FIGURE 5.2 – Configuration du patch test de Taylor en 3D

5.1.1.2 Poutre en flexion en contact

Ce test permet principalement d’observer le processus de décollement. Il consiste à mettre deux poutres en contact initial et à placer (à l’aide de pression) la poutre supérieure en flexion de sorte à observer le décollement. Ce test est donc intéressant pour valider les choix algorithmiques qui régissent l’évaluation des statuts de contact. Il permet de commencer à sortir du cas simple du contact plan et aussi à traiter les cas de transition contact/non-contact. On fixera le coefficient de Poisson à zéro de sorte à observer une pression de contact invariante selon y dans le cas 3D.

Configuration du test en 2D :

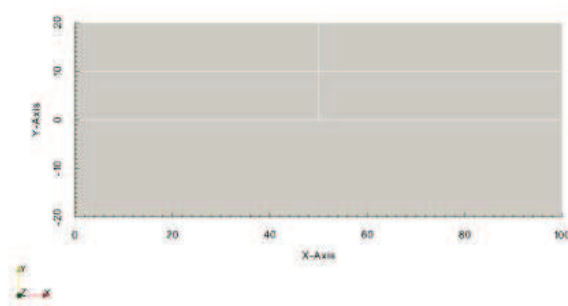


FIGURE 5.3 – Configuration du test de la poutre en flexion en contact en 2D

On considère deux poutres de dimension $100mm \times 20mm$ composées du même matériau (module de Young $E = 2000MPa$; coefficient de Poisson $\nu = 0.0$) en contact. On impose des conditions de symétrie sur l’axe \vec{Oy} et sur la base de la poutre inférieure. On impose une pression de $30MPa$ sur la demi-face supérieure (côté parallèle à l’axe \vec{Ox}) de la poutre

supérieure et une pression de $7.5MPa$ sur la demi-face latérale supérieure de la poutre supérieure. Les poutres seront maillées de manière incompatible pour chaque élément considéré.

Configuration du test en 3D :

On considère deux poutres de dimension $200mm \times 25mm \times 25mm$ composées du même matériau (module de Young $E = 2000MPa$; coefficient de Poisson $\nu = 0.0$) en contact. On impose des conditions de symétrie sur les faces $\vec{Ox}\vec{Oz}$ et $\vec{Oy}\vec{Oz}$ et sur la base de la poutre inférieure. On impose une pression de $30MPa$ sur la demi-face supérieure (côté face $\vec{Oy}\vec{Oz}$) de la poutre supérieure et une pression de $7.5MPa$ sur la demi-face latérale supérieure de la poutre supérieure. Les poutres seront maillées de manière incompatible pour chaque élément considéré.

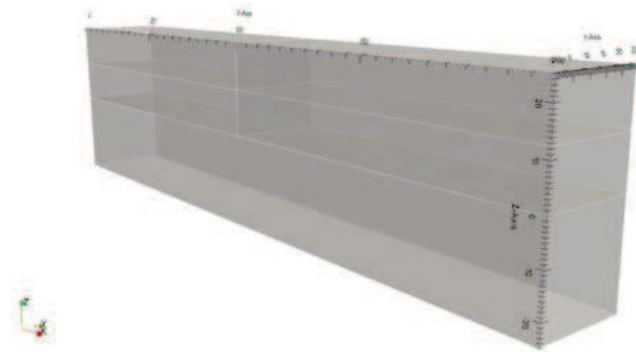


FIGURE 5.4 – Configuration du test de la poutre en flexion en contact en 3D

Dans les deux configurations, on utilisera une solution de référence calculée sur un maillage fin et compatible pour définir des valeurs caractéristiques de référence.

5.1.1.3 Contact de Hertz

Le problème du contact de Hertz est l’un des tests fondamentaux en mécanique du contact [42]. Il possède une solution non triviale et la pression de contact peut être exprimée analytiquement (sous hypothèses HPP). C’est un cas test compliqué pour plusieurs raisons : la surface de contact effective est très faible par rapport à la taille des objets en contact, on se situe dans le cas du contact déformable-déformable et il fait intervenir des géométries courbes. A ces difficultés, on va rajouter l’incompatibilité des maillages et comparer la qualité des résultats obtenus (particulièrement au niveau de la pression de contact). On s’attend à observer des résultats montrant plus ou moins d’oscillations parasites pour la méthode Continue et à observer des résultats sans oscillations avec la méthode LAC (si la géométrie est bien approchée).

Configuration du test en 2D :

On considère un cylindre de diamètre $100mm$ en acier (module de Young $E = 2.1 \cdot 10^5 MPa$; coefficient de Poisson $\nu = 0.3$) en contact avec un block de coté $200mm$ en

aluminium (module de Young $E = 7 \cdot 10^4 MPa$; coefficient de Poisson $\nu = 0.3$). On suppose que les deux matériaux se comportent de manière élastique (linéaire). Le cylindre subit une force nodale de $35kN$ en son sommet. On utilise une approximation 2D représentative du problème. Les deux objets seront maillés de manière indépendante. Cette configuration de test est issue des benchmarks NAFEMS, voir [52].

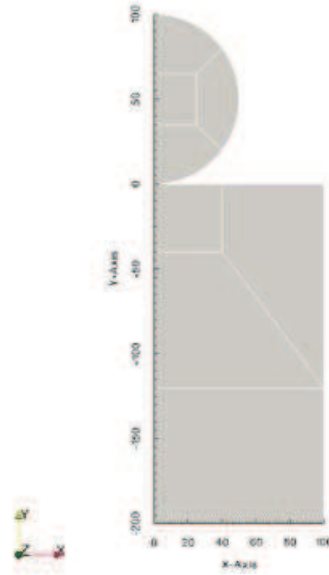


FIGURE 5.5 – Contact de Hertz, configuration en 2D

Une solution analytique est connue pour la pression de contact :

$$p(x) = p_{max} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

où $p_{max} = -3585.37 MPa$ et $a = 6.21mm$ désigne le rayon de la zone de contact.

Configuration du test en 3D :

On considère deux demi-sphères de rayon $100mm$, dont on modélise un huitième de chacune en utilisant les différentes symétries du problème. On suppose que les deux objets sont constitués du même matériau (module de Young $E = 2 \cdot 10^3 MPa$; coefficient de Poisson $\nu = 0.3$), et se comportent de manière élastique (linéaire). On applique un déplacement de $1.5mm$ (resp. $-1.5mm$) sur la face supérieure de la demi-sphère supérieure (resp. sur la face inférieure de la demi-sphère inférieure). Les deux objets seront maillés de manière indépendante.

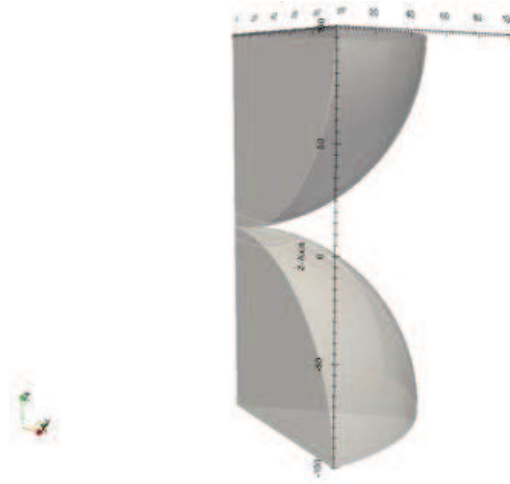


FIGURE 5.6 – Contact de Hertz, configuration en 3D

Une solution analytique est connue pour la pression de contact :

$$p(r) = p_{max} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}$$

où $p_{max} = -171.362 MPa$ et $a = 12.247 mm$ représente le rayon de la zone de contact.

5.1.1.4 Inclusion de deux sphères creuses sous pression

Ce cas test s'apparente au patch test de Taylor, dans le sens où le contact est établi et que l'on s'attend à retrouver le comportement d'une unique enveloppe sphérique. Cependant, ce cas test est beaucoup plus délicat du fait que l'interface de contact est courbe. De plus, les maillages étant incompatibles, la courbure est approchée de manière différente du côté esclave et maître. On s'attend donc à avoir une qualité bien moindre des résultats dans les cas traités avec des maillages linéaires par rapport aux cas traités avec des maillages quadratiques.

Configuration du test en 2D :

On considère l'inclusion de deux enveloppes sphériques (rayons internes $r_{int}^1 = 20mm$, $r_{int}^2 = 30mm$, rayons externes $r_{ext}^1 = 30mm$, $r_{ext}^2 = 40mm$) constituées du même matériau (module de Young $E = 2000 MPa$; coefficient de Poisson $\nu = 0.3$) en utilisant une modélisation axisymétrique. De plus, on utilise une condition de symétrie sur l'axe \vec{Ox} . (voir Figure 5.7). On applique une pression interne, p , de $25 MPa$. Les deux objets seront maillés de manière incompatible.

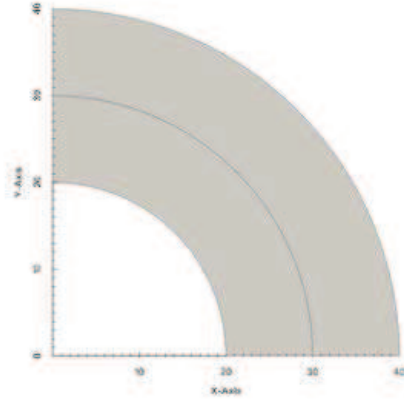


FIGURE 5.7 – Inclusion de deux sphères creuses sous pression, configuration 2D

La solution analytique de ce problème est connue, elle s’exprime facilement en coordonnées polaires :

$$u_r(r, \theta) = \frac{(r_{int}^1)^3}{(r_{ext}^2)^3 - (r_{int}^1)^3} \left((1 - 2\nu)r + (1 + \nu) \frac{(r_{int}^1)^3}{2r^2} \right) \frac{p}{E},$$

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = -\frac{(r_{int}^1)^3}{(r_{ext}^2)^3 - (r_{int}^1)^3} \left(\frac{(r_{int}^1)^3}{r^3} - 1 \right) p.$$

On obtient alors les valeurs caractéristiques suivantes,

$$\begin{aligned} u_r(20, \theta) &= 0.2mm, \\ u_r(40, \theta) &= 0.075mm, \\ \sigma_{rr}(20, \theta) &= 25MPa, \\ \lambda = \sigma_{rr}(30, \theta) &= 4,894179894MPa, \\ \sigma_{rr}(40, \theta) &= 0MPa. \end{aligned}$$

Configuration du test en 3D :

On considère le même problème que précédemment en utilisant cette fois-ci une modélisation 3D (voir Figure 5.8).

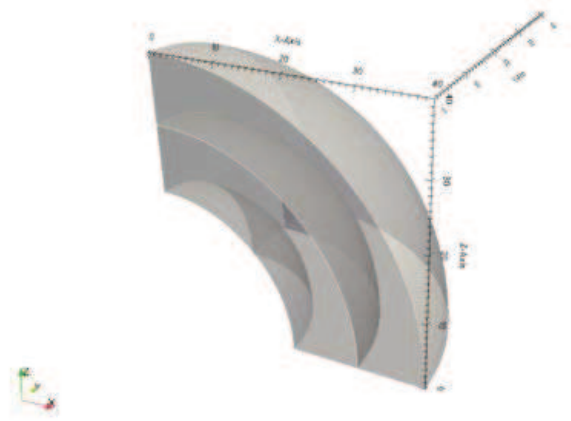


FIGURE 5.8 – Inclusion de deux sphères creuses sous pression, configuration 3D

5.1.2 Analyse des résultats

On va procéder à une analyse comparative exhaustive entre les résultats obtenus par la méthode LAC et ceux obtenus par la méthode Continue pour chaque cas test en 2D et 3D en considérant tous les éléments implémentés pour la méthode LAC à l’heure actuelle. Le but de cette analyse est de mettre en avant les qualités et les défauts de la méthode proposée par rapport à une méthode de type “collocation” dans le cas général des maillages incompatibles. On portera une attention particulière aux maillages afin de ne pas sortir du cadre des projections et intersections de mailles convexes (voir Paragraphe 4.3.5).

5.1.2.1 Patch test de Taylor

Cas 2D

Les résultats obtenus par la méthode LAC sont présentés dans les Figures 5.9 et 5.11, les résultats obtenus par la méthode Continue sont présentés dans les Figures 5.10 et 5.12 (de haut en bas champ de déplacement u_y sur la configuration déformée, composante σ_{yy} du tenseur des contraintes de Cauchy sur la configuration déformée et le multiplicateur de Lagrange (surface esclave)). La méthode LAC passe le patch test avec succès, voir Tableau 5.1. On retrouve bien le bon comportement des méthodes de type “mortar”, toutes les valeurs d’intérêt sont approchées à précision machine. Comme annoncé, la méthode Continue échoue étant donnée que la méthode repose sur une formulation de type “collocation”. On observe dès lors des oscillations plus ou moins importantes, jusqu’à 36%, selon la configuration considérée, voir Tableau 5.2.

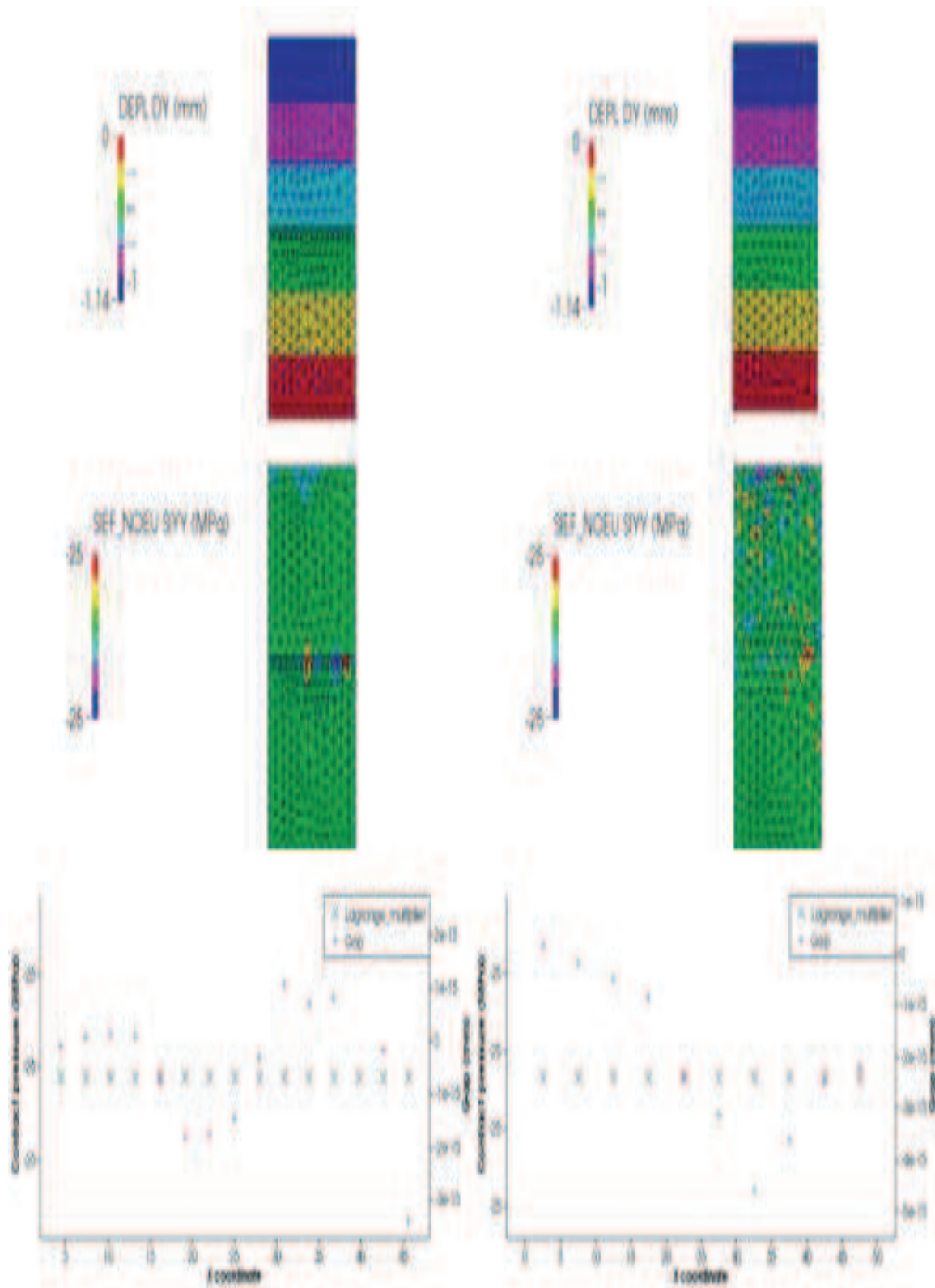


FIGURE 5.9 — Résultats pour des maillages en triangles linéaires et quadratiques (méthode LAC) : colonne de gauche triangles à 3 nœuds, colonne de droite triangles à 6 nœuds.

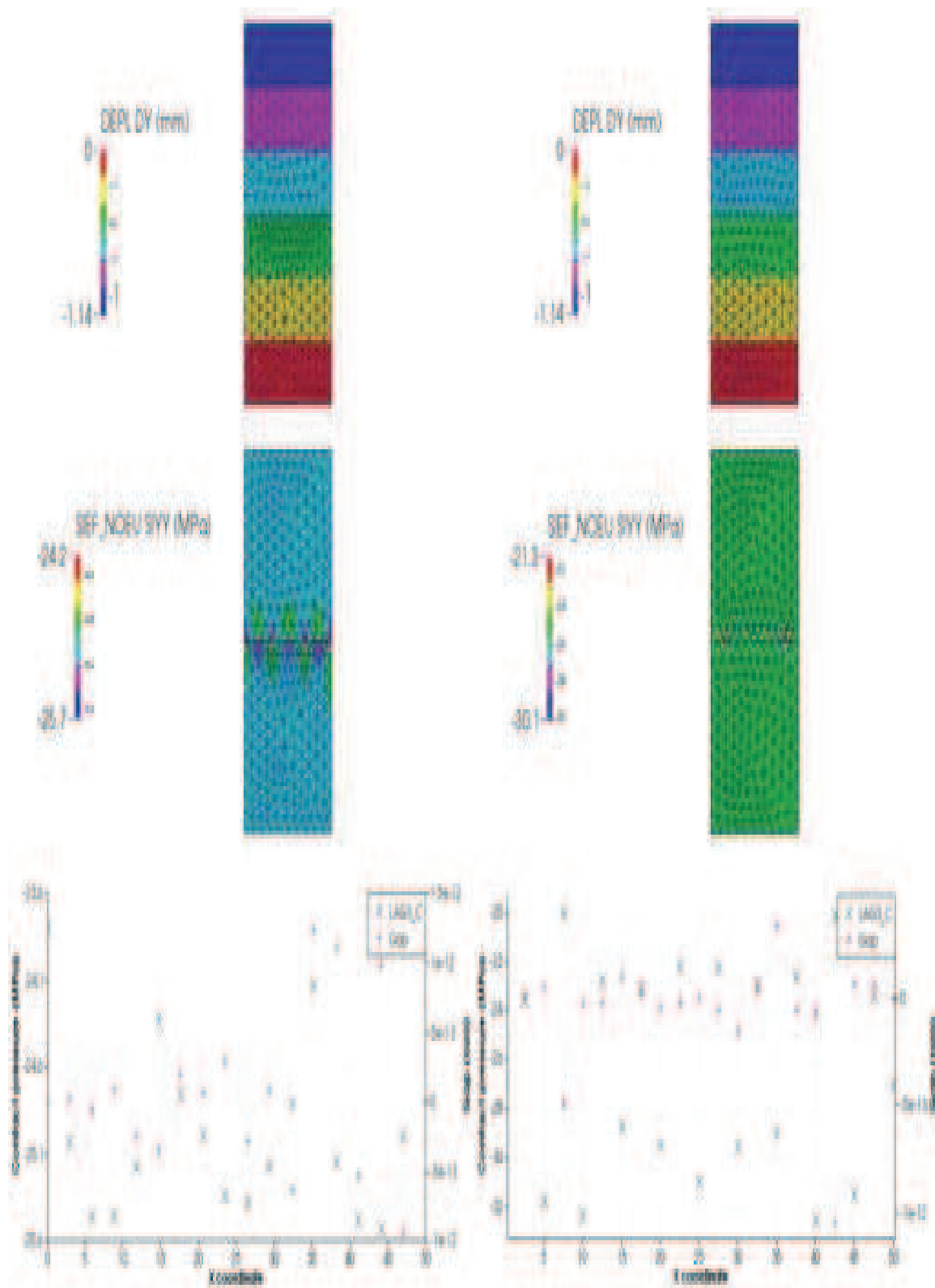


FIGURE 5.10 – Résultats pour des maillages en triangles linéaires et quadratiques (méthode Continue) : colonne de gauche triangles à 3 nœuds, colonne de droite triangles à 6 nœuds.

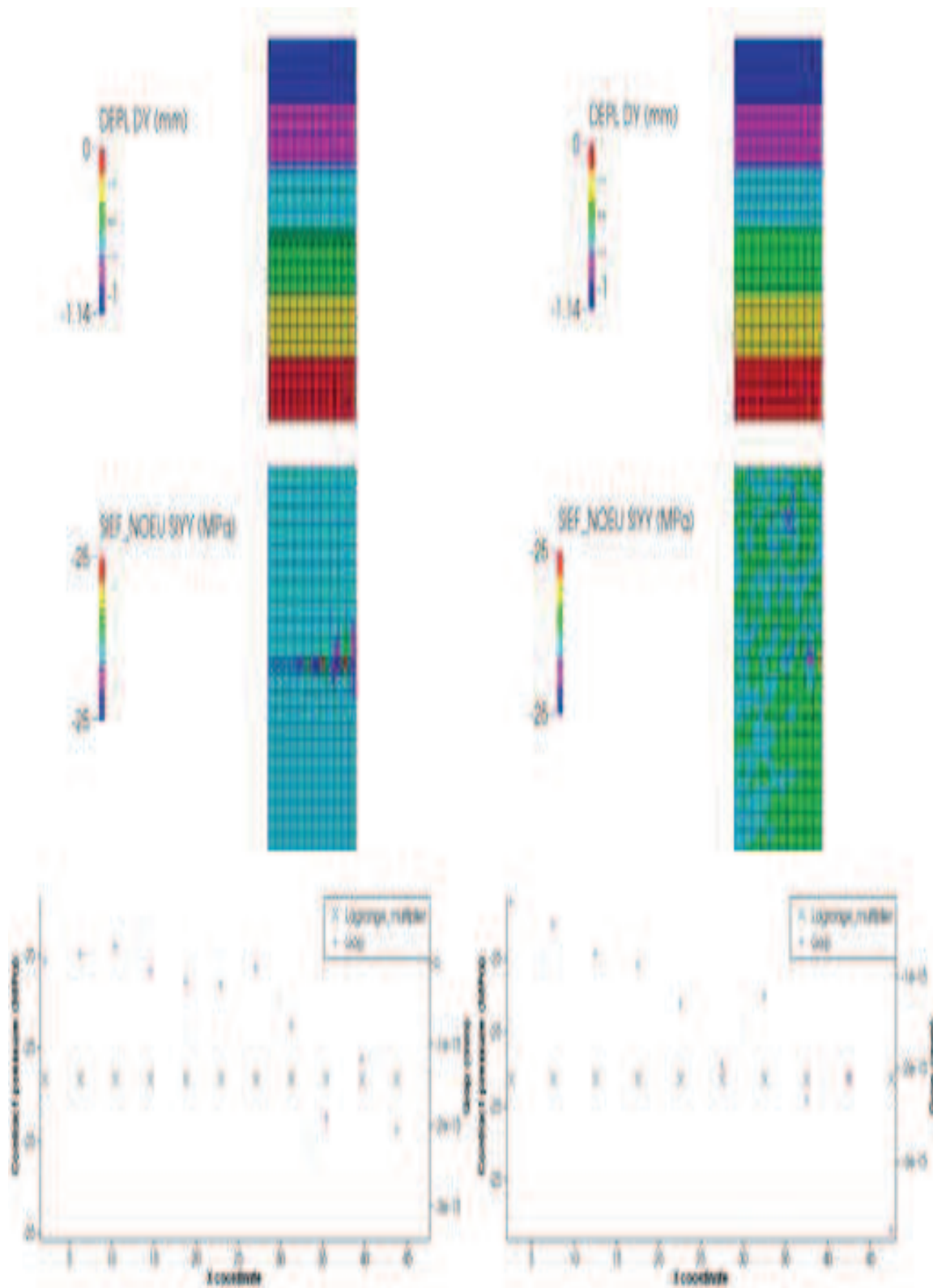


FIGURE 5.11 – Résultats pour des maillages en quadrangles linéaires et quadratiques (méthode LAC) : colonne de gauche quadrangles à 4 nœuds, colonne de droite quadrangles à 8 nœuds.

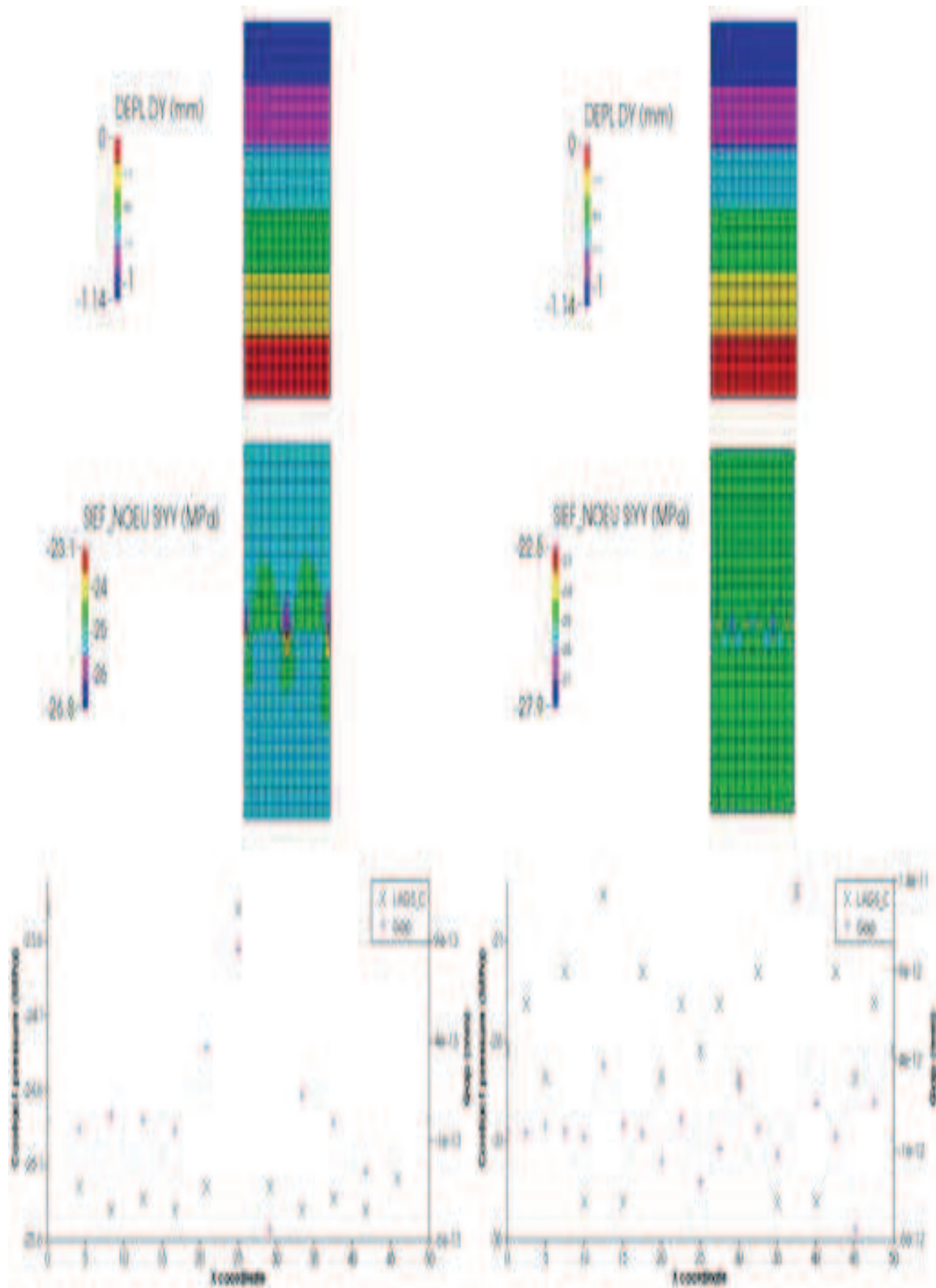


FIGURE 5.12 – Résultats pour des maillages en quadrangles linéaires et quadratiques (méthode Continue) : colonne de gauche quadrangles à 4 nœuds, colonne de droite quadrangles à 8 nœuds.

Éléments	Erreur relative $ \lambda - \lambda^h $		Erreur relative $ \sigma_{yy} - \sigma_{yy}^h $		Résultat du test
	λ^h min	λ^h max	σ_{yy}^h min	σ_{yy}^h max	
TRIA 3	$5 \cdot 10^{-12}\%$	$3 \cdot 10^{-12}\%$	$2 \cdot 10^{-12}\%$	$2 \cdot 10^{-12}\%$	Succès
TRIA 6	$6 \cdot 10^{-13}\%$	$7 \cdot 10^{-13}\%$	$2 \cdot 10^{-12}\%$	$2 \cdot 10^{-12}\%$	Succès
QUAD 4	$3 \cdot 10^{-12}\%$	$4 \cdot 10^{-12}\%$	$2 \cdot 10^{-12}\%$	$4 \cdot 10^{-12}\%$	Succès
QUAD 8	$1 \cdot 10^{-12}\%$	$1 \cdot 10^{-12}\%$	$2 \cdot 10^{-12}\%$	$2 \cdot 10^{-12}\%$	Succès

TABLE 5.1 – Erreur relative en pression de contact λ et sur σ_{yy} pour la méthode LAC.

Éléments	Erreur relative $ \lambda - \lambda^h $		Erreur relative $ \sigma_{yy} - \sigma_{yy}^h $		Résultat du test
	λ^h min	λ^h max	σ_{yy}^h min	σ_{yy}^h max	
TRIA 3	2.15%	4.98%	2.73%	3.17%	Échec
TRIA 6	30.44%	19.77%	20.4%	14.94%	Échec
QUAD 4	1.61%	6.43%	7.19%	7.56%	Échec
QUAD 8	36.47%	25.08%	11.56%	10.04%	Échec

TABLE 5.2 – Erreur relative en pression de contact λ et sur σ_{yy} pour la méthode Continue.

Cas 3D

Les résultats obtenus par la méthode LAC sont présentés dans les Figures 5.13 et 5.15, les résultats obtenus par la méthode Continue sont présentés dans les Figures 5.14 et 5.16 (de haut en bas champ de déplacement u_z sur la configuration déformée, composante σ_{zz} du tenseur des contraintes de Cauchy sur la configuration déformée et multiplicateur de Lagrange (surface esclave)). De la même façon que précédemment, la nouvelle méthode proposée passe le patch test avec succès, à précision machine. On retrouve le bon comportement des méthodes de type “mortar”, toutes les valeurs d’intérêts sont respectées, voir Tableau 5.3. Comme pour le cas 2D, la méthode Continue échoue aussi dans le cas 3D étant donné que l’on considère des maillages incompatibles. On observe des oscillations pour les multiplicateurs de Lagrange de contact et pour la composante σ_{zz} du tenseur des contraintes de Cauchy localisé au niveau de la zone de contact, voir Tableau 5.4 . Cependant, l’ordre de grandeur des résultats en déplacement est bien respecté.

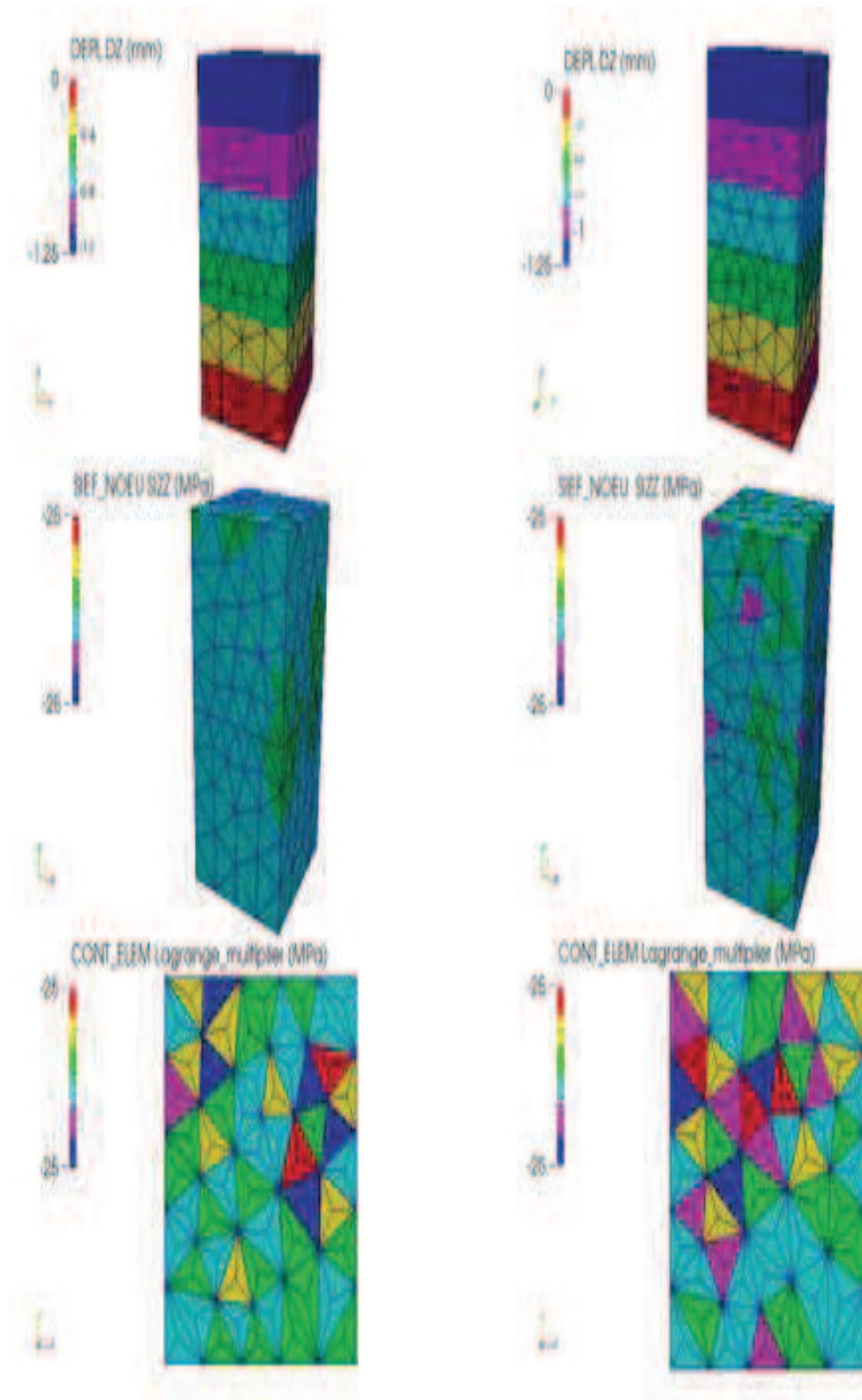


FIGURE 5.13 – Résultats pour des maillages en éléments linéaires et quadratiques tétraédriques (méthode LAC) : colonne de gauche tétraèdres à 4 nœuds, colonne de droite tétraèdres à 10 nœuds.

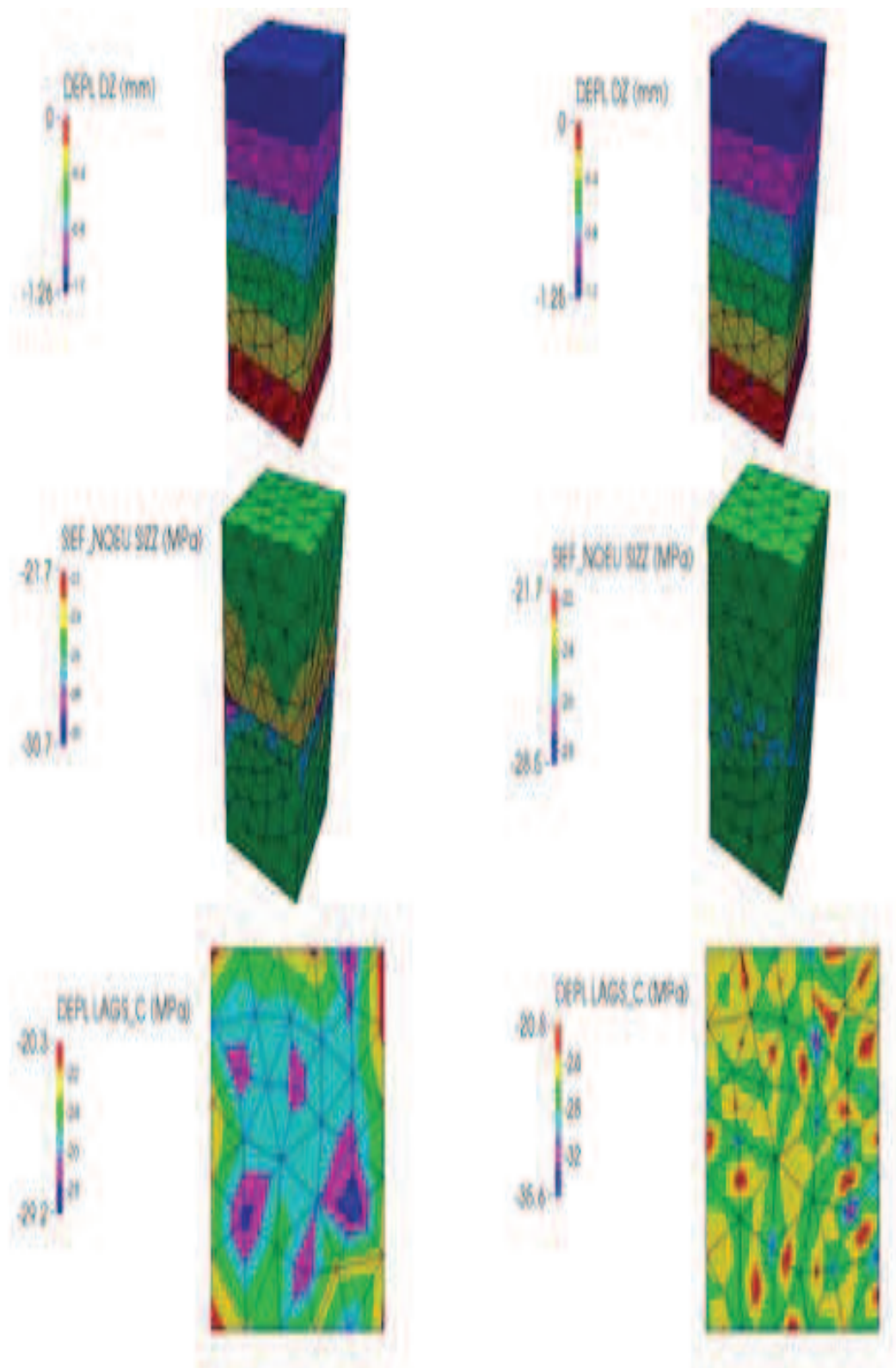


FIGURE 5.14 – Résultats pour des maillages en éléments linéaires et quadratiques tétraédriques (méthode Continue) : colonne de gauche tétraèdres à 4 nœuds, colonne de droite tétraèdres à 10 nœuds.

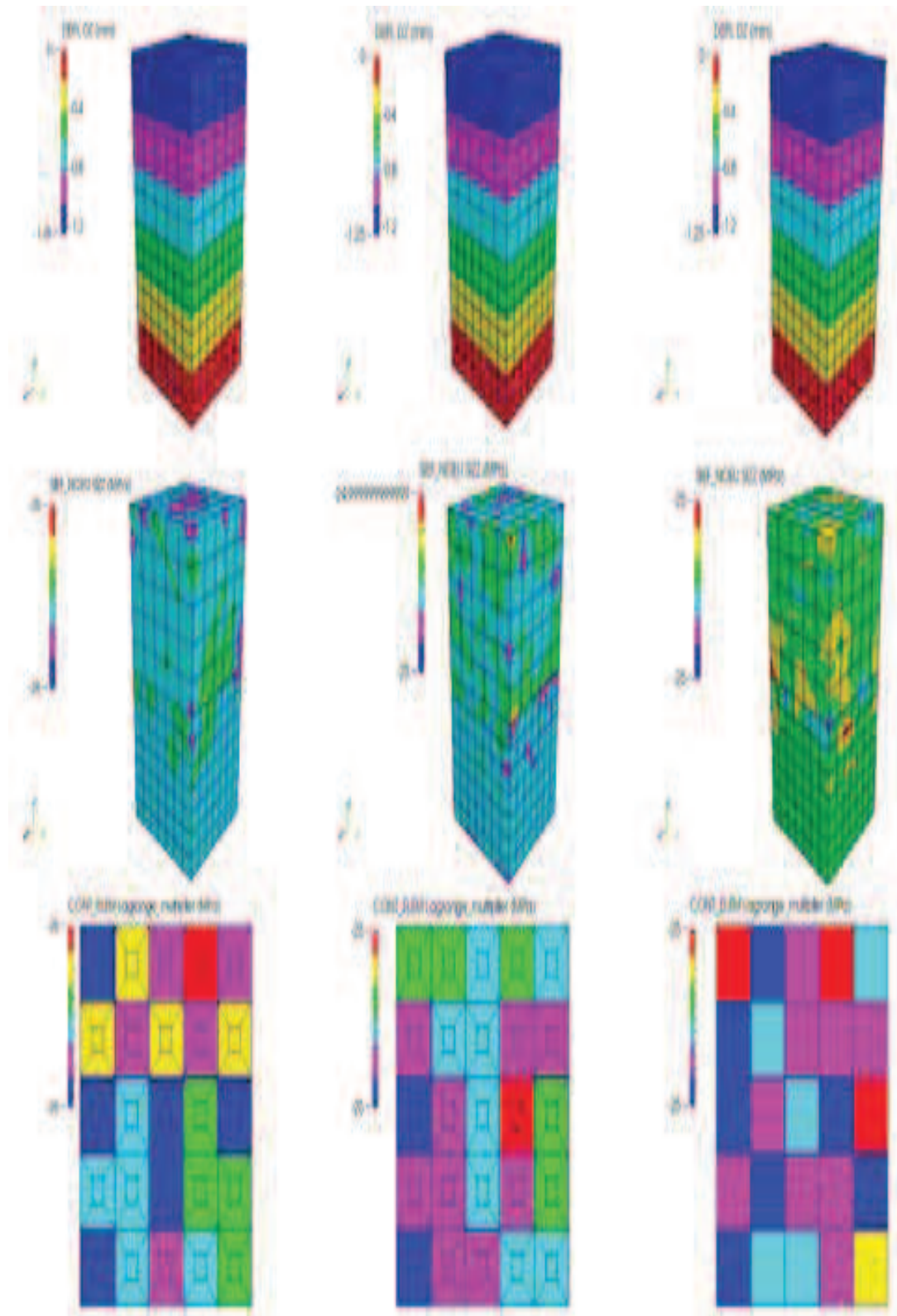


FIGURE 5.15 – Résultats pour des maillages en éléments linéaires et quadratiques hexaédriques (méthode LAC) : colonne de gauche hexaèdres à 8 nœuds, colonne du milieu hexaèdres à 20 nœuds et colonne de droite hexaèdres à 27 nœuds.

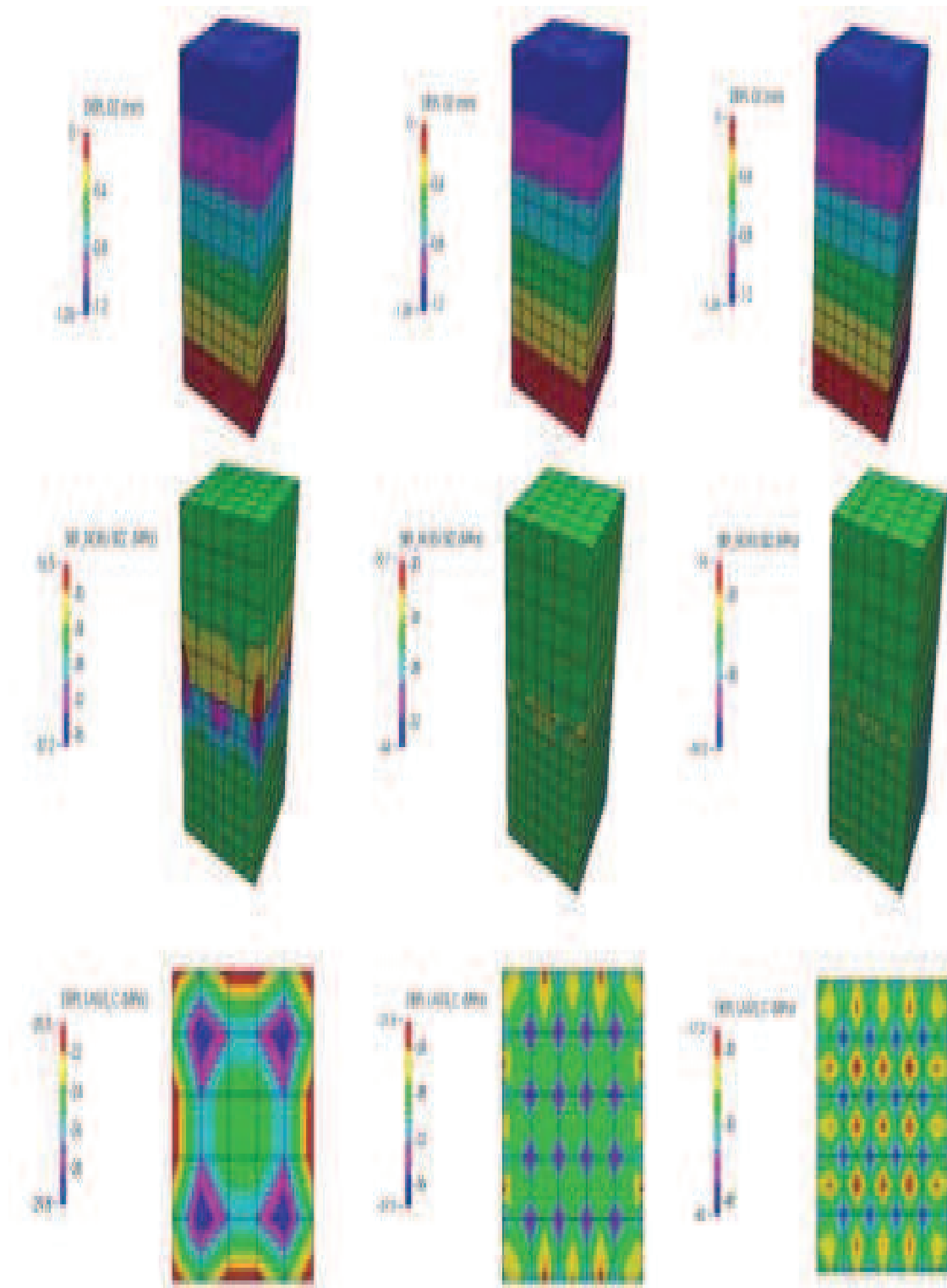


FIGURE 5.16 — Résultats pour des maillages en éléments linéaires et quadratiques hexaédriques (méthode Continue) : colonne de gauche hexaèdres à 8 nœuds, colonne du milieu hexaèdres à 20 nœuds et colonne de droite hexaèdres à 27 nœuds.

Éléments	Erreur relative $ \lambda - \lambda^h $		Erreur relative $ \sigma_{zz} - \sigma_{zz}^h $		Résultat du test
	λ^h min	λ^h max	σ_{zz}^h min	σ_{zz}^h max	
TETRA 4	$8 \cdot 10^{-12}\%$	$7 \cdot 10^{-12}\%$	$1 \cdot 10^{-12}\%$	$2 \cdot 10^{-12}\%$	Succès
TETRA 10	$2 \cdot 10^{-13}\%$	$2 \cdot 10^{-12}\%$	$3 \cdot 10^{-12}\%$	$2 \cdot 10^{-12}\%$	Succès
HEXA 8	$6 \cdot 10^{-12}\%$	$3 \cdot 10^{-12}\%$	$4 \cdot 10^{-12}\%$	$4 \cdot 10^{-12}\%$	Succès
HEXA 20	$7 \cdot 10^{-12}\%$	0.0%	$2 \cdot 10^{-12}\%$	$2 \cdot 10^{-12}\%$	Succès
HEXA 27	$8 \cdot 10^{-13}\%$	$3 \cdot 10^{-13}\%$	$2 \cdot 10^{-12}\%$	$1 \cdot 10^{-12}\%$	Succès

TABLE 5.3 – Erreur relative en pression de contact λ et sur σ_{zz} pour la méthode LAC.

Élément	Erreur relative $ \lambda - \lambda^h $		Erreur relative $ \sigma_{zz} - \sigma_{zz}^h $		Résultat du test
	λ^h min	λ^h max	σ_{zz}^h min	σ_{zz}^h max	
TETRA 4	17%	16.74%	22.68%	13.33%	Échec
TETRA 10	35.37%	22.23%	13.96%	13.32%	Échec
HEXA 8	19.25%	27.66%	48.82%	33.84%	Échec
HEXA 20	50.81%	7.99%	35.9%	21.16%	Échec
HEXA 27	46.78%	28.47%	56.63%	36.18%	Échec

TABLE 5.4 – Erreur relative en pression de contact λ et sur σ_{zz} pour la méthode Continue.

Ce premier test démontre la capacité de la méthode LAC à gérer de manière optimale (à l’instar des méthodes de type “mortar”) les maillages incompatibles sur un problème simple de contact plan en 2D et 3D. On remarque que déjà dans ce cas simple les méthodes de type “collocation” montrent leurs limites lorsque l’on considère le cas général des maillages incompatibles.

Remarque 5.1. Au niveau de la convergence de l’algorithme de Newton généralisé, on observe une convergence à la première itération pour la méthode LAC alors que la méthode Continue a besoin de plus d’itérations pour ce cas test. Ceci confirme que la méthode LAC converge à précision machine dans ce cas simple. Une fois le contact établi (dès l’initialisation du problème) on se retrouve dans un problème purement linéaire, on s’attend donc à converger dès la première itération de l’algorithme. En effet, étant donné que l’opération de projection-intersection et que les schémas d’intégration utilisés sont optimaux dans ce cas plan, les éléments finis de type $P^1/P^0(T^M)$ ou $P^2/P^0(T^M)$ sont suffisants pour décrire parfaitement la solution analytique (déplacements linéaires, pression de contact constante).

Remarque 5.2. Dans le cas de maillages compatibles, la méthode de collocation passe le test avec succès (voir cas test SSNV167 de *Code_Aster*). On rappelle que la méthode “mortar classique” est équivalente à la méthode de “collocation” dans le cas des maillages compatibles, en effet la matrice de projection “mortar” devient alors l’identité, voir [44].

5.1.2.2 Poutre en flexion en contact

Cas 2D

Solution de référence sur un maillage fin compatible

On commence par exhiber une solution de référence obtenue par la méthode Continue sur un maillage très fin (maillage en quadrangles linéaires avec 7735 DDL dont 91 DDL de contact) compatible, voir Figure 5.17. Dans ce cas de figure, les méthodes de type “collocation” et de type “mortar” standard sont équivalentes; il est donc licite d'utiliser les résultats obtenus par la méthode Continue sur ce maillage comme référence. Étant donné que dans le cas compatible la méthode LAC n'est pas équivalente au méthode “mortar standard”, on calcule donc la solution issue de la méthode LAC sur le même maillage pour vérifier quantitativement la proximité des résultats issus des deux méthodes. On obtient bien des résultats similaires à $10^{-2}\%$ près, voir Tableau 5.5. On va donc comparer les résultats obtenus avec les deux méthodes de manière qualitative par rapport aux résultats issus de la méthode Continue sur le maillage de référence compatible et de manière quantitative entre les résultats issus des deux méthodes et leurs résultats de référence respectifs.

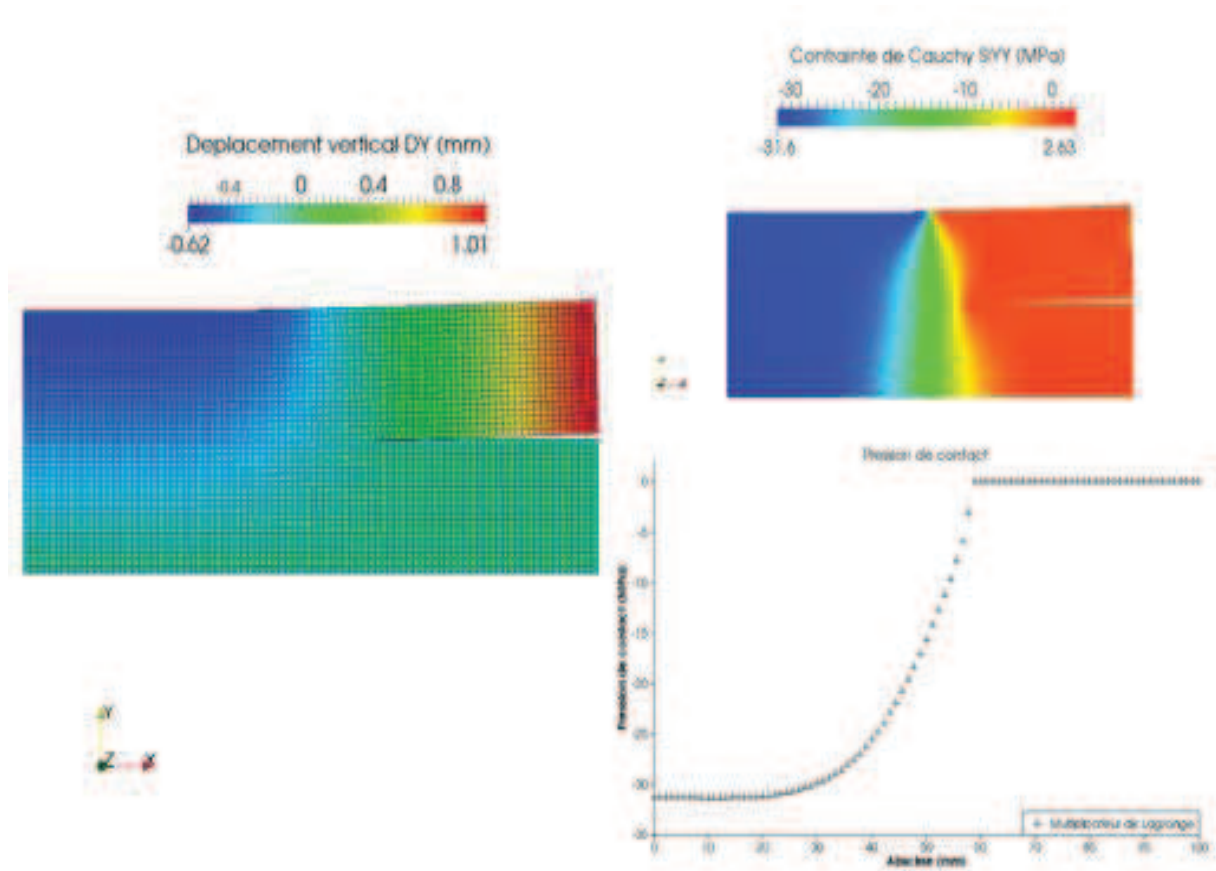


FIGURE 5.17 – Résultats de référence obtenus par la méthode Continue avec maillage compatible linéaire.

Valeurs de référence	Méthode Continue	Méthode LAC	Écart relatif
u_y^{max}	1.0116mm	1.0112mm	0.0424%
u_y^{min}	-0.6201mm	-0.6208mm	$2.4 \cdot 10^{-3}\%$
λ^{min}	-31.2114MPa	-31.2056MPa	0.0187%

TABLE 5.5 – Valeurs de référence et écart entre les valeurs issues des deux méthodes sur un maillage compatible.

Analyse des résultats sur des maillages incompatibles

Les résultats obtenus par la méthode LAC sont présentés dans les Figures 5.18 et 5.20, les résultats obtenus par la méthode Continue sont présentés dans les Figures 5.19 et 5.21 (de haut en bas : champ de déplacement u_y sur la configuration déformée, multiplicateur de Lagrange et “jeu” en fonction de l’abscisse du centre de la macro-maille). Les erreurs relatives par rapport aux solutions de référence sont présentées dans le Tableau 5.6 pour la méthode LAC et dans le Tableau 5.7 pour la méthode Continue. Les résultats en déplacement et la détection de la zone de contact réelle sont comparables entre les deux méthodes. On remarque que les éléments linéaires en triangles sont moins précis vis à vis du déplacement u_y^{ref} maximum pour les deux méthodes, ce manque de précision peut être expliqué par la plus grande “rigidité” des éléments triangles à 3 nœuds assez grossier. Au niveau des pressions de contact (approchées par les multiplicateurs de Lagrange), la méthode LAC permet d’obtenir des résultats sans oscillations apparentes et cela pour tous les types d’éléments considérés. De plus, l’écart relatif par rapport à λ^{min} est inférieur 0.2% pour les éléments linéaires et inférieur 0.06% pour les éléments quadratiques, l’approximation des pressions de contact est donc de bonne qualité et très précise. Les résultats issus de la méthode Continue possèdent de très légères oscillations pour les cas linéaires et de fortes oscillations pour les cas quadratiques. Les écarts avec λ^{ref} minimum sont de l’ordre de 0.7% pour les éléments linéaires et de plus de 9.5% pour les éléments quadratiques. Les résultats en terme de pression de contact obtenus par la méthode LAC sont donc de meilleure qualité globale pour les maillages quadratiques et plus précis pour les maillages linéaires.

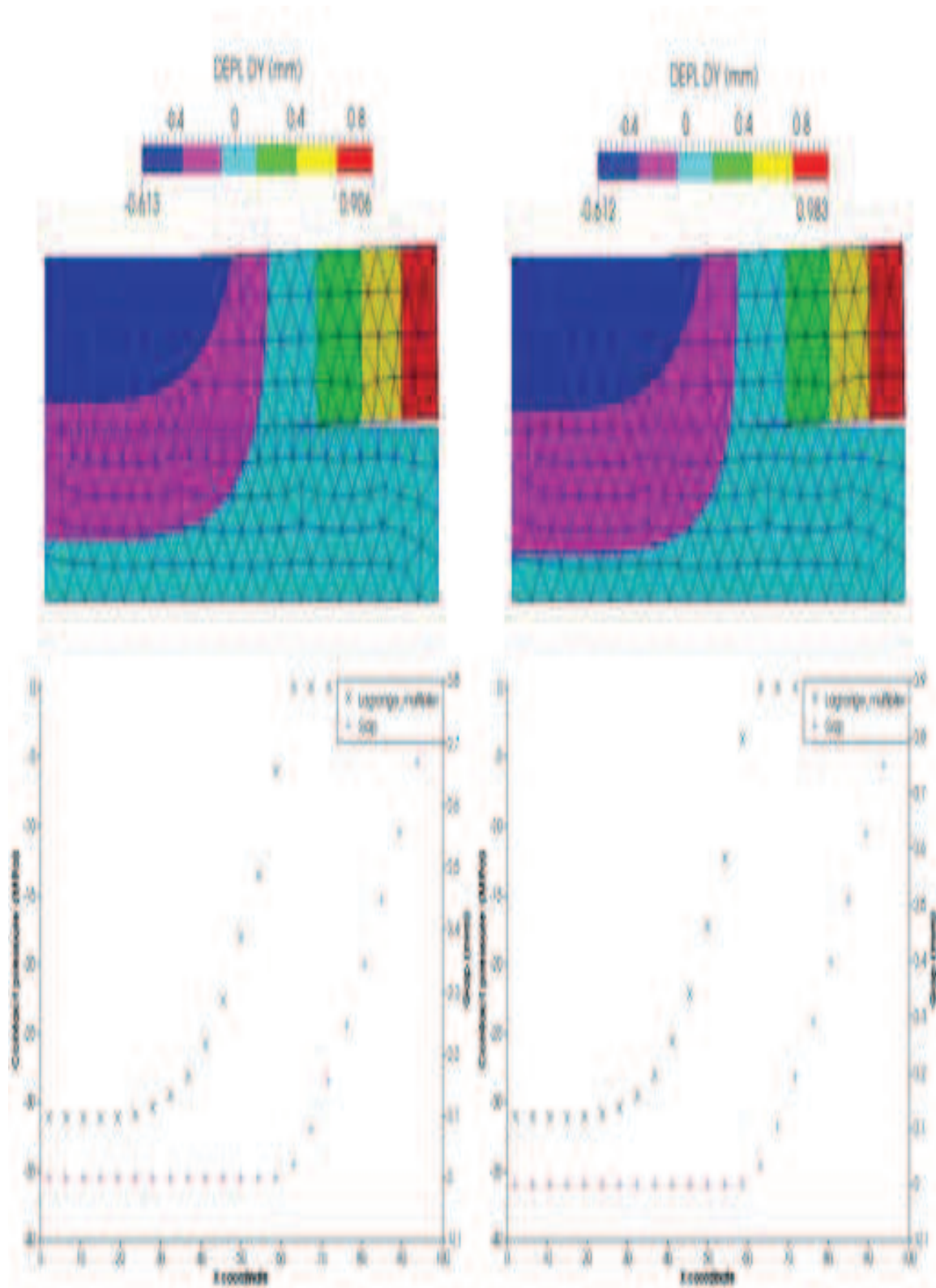


FIGURE 5.18 – Résultats pour des maillages en triangles linéaires et quadratiques (Méthode LAC) : colonne de gauche triangles à 3 nœuds, colonne de droite triangle à 6 nœuds.

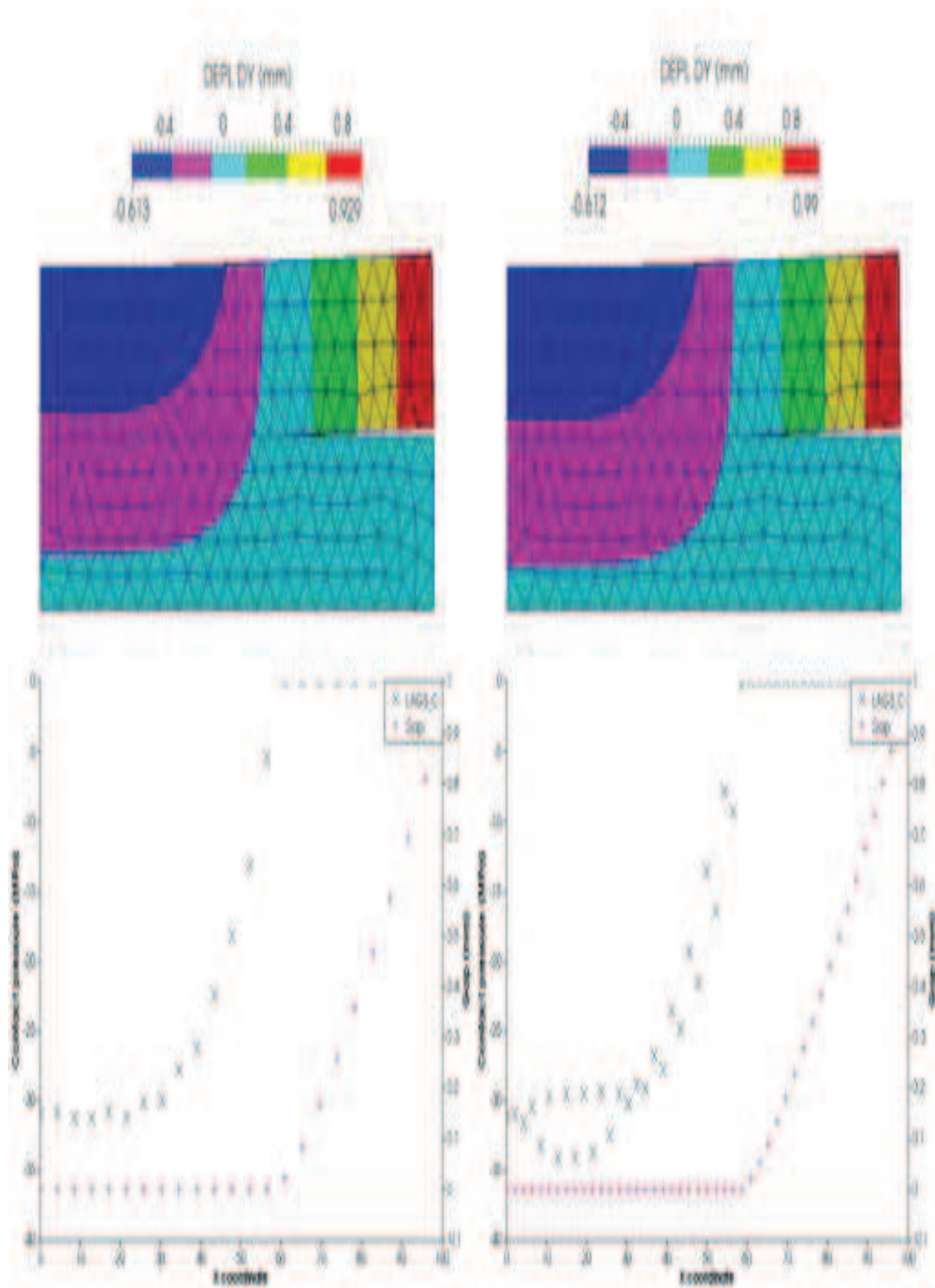


FIGURE 5.19 – Résultats pour des maillages en triangles linéaires et quadratiques (Méthode Continue) : colonne de gauche triangles à 3 nœuds, colonne de droite triangle à 6 nœuds.

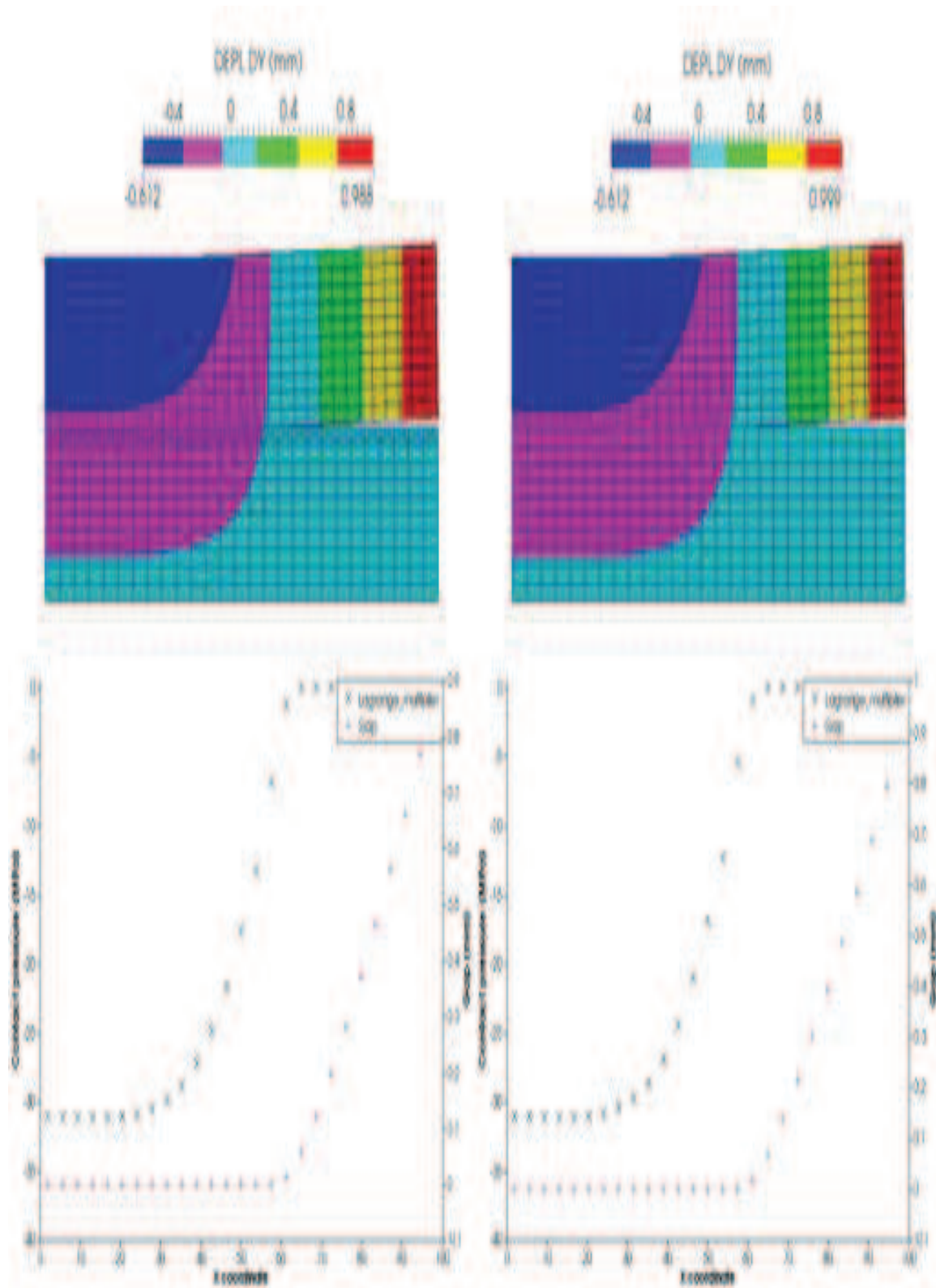


FIGURE 5.20 – Résultats pour des maillages en quadrangles linéaires et quadratiques (Méthode LAC) : colonne de gauche quadrangles à 4 nœuds, colonne de droite quadrangle à 8 nœuds.

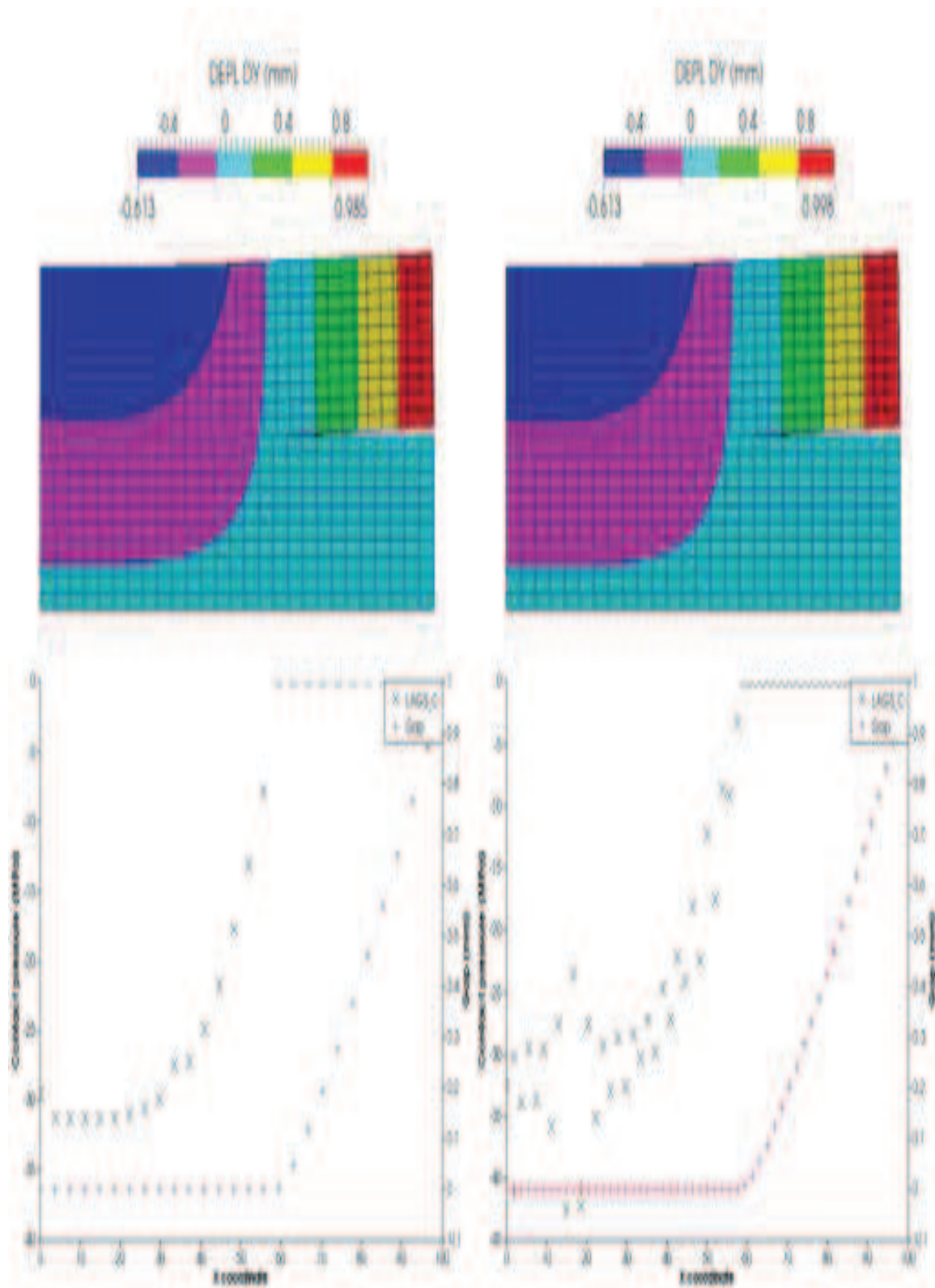


FIGURE 5.21 – Résultats pour des maillages en quadrangles linéaires et quadratiques (Méthode Continue) : colonne de gauche quadrangles à 4 nœuds, colonne de droite quadrangle à 8 nœuds.

Éléments	Erreur relative λ^h	Erreur relative u_y^h	
	λ^{ref} minimum	u_y^{ref} minimum	u_y^{ref} maximum
TRIA 3	0.19%	0.18%	9.45%
TRIA 6	0.04%	0.03%	0.95%
QUAD 4	0.06 %	0.05%	0.64%
QUAD 8	0.01%	0.003%	0.6%

TABLE 5.6 – Erreur relative en pression de contact et en déplacement vertical u_y^{ref} minimum et maximum pour la méthode LAC.

Éléments	Erreur relative λ^h	Erreur relative u_z^h	
	λ^{ref} minimum	u_y^{ref} minimum	u_y^{ref} maximum
TRIA 3	0.69%	0.14%	7.06%
TRIA 6	9.66%	0.04%	0.34%
QUAD 4	0.71%	0.12%	1.17%
QUAD 8	36.48%	0.21%	0.44%

TABLE 5.7 – Erreur relative en pression de contact et en déplacement vertical u_y^{ref} minimum et maximum pour la méthode Continue.

Cas 3D

Solution de référence sur un maillage fin compatible

Comme dans le cas 2D, on commence par exhiber une solution de référence obtenue par la méthode Continue sur un maillage très fin (maillage en hexaèdres linéaires avec 219856 DDL dont 2416 DDL de contact) compatible, voir Figure 5.22. On calcule ensuite la solution issue de la méthode LAC sur le même maillage et l’on obtient des résultats similaires à $10^{-2}\%$ près, voir Tableau 5.8. On va donc comparer les résultats obtenus avec les deux méthodes de manière qualitative par rapport aux résultats issus de la méthode Continue sur le maillage de référence et de manière quantitative entre les résultats issus des deux méthodes et leurs résultats de référence respectifs.

Valeurs de référence	Méthode Continue	Méthode LAC	Écart relatif
u_z^{max}	2.5949mm	2.5972mm	0.032%
u_z^{min}	−0.7706mm	−0.7708mm	0.087%
λ^{min}	−31.0138MPa	−31.03MPa	0.052%

TABLE 5.8 – Valeurs de référence et écart entre les valeurs issues des deux méthodes.

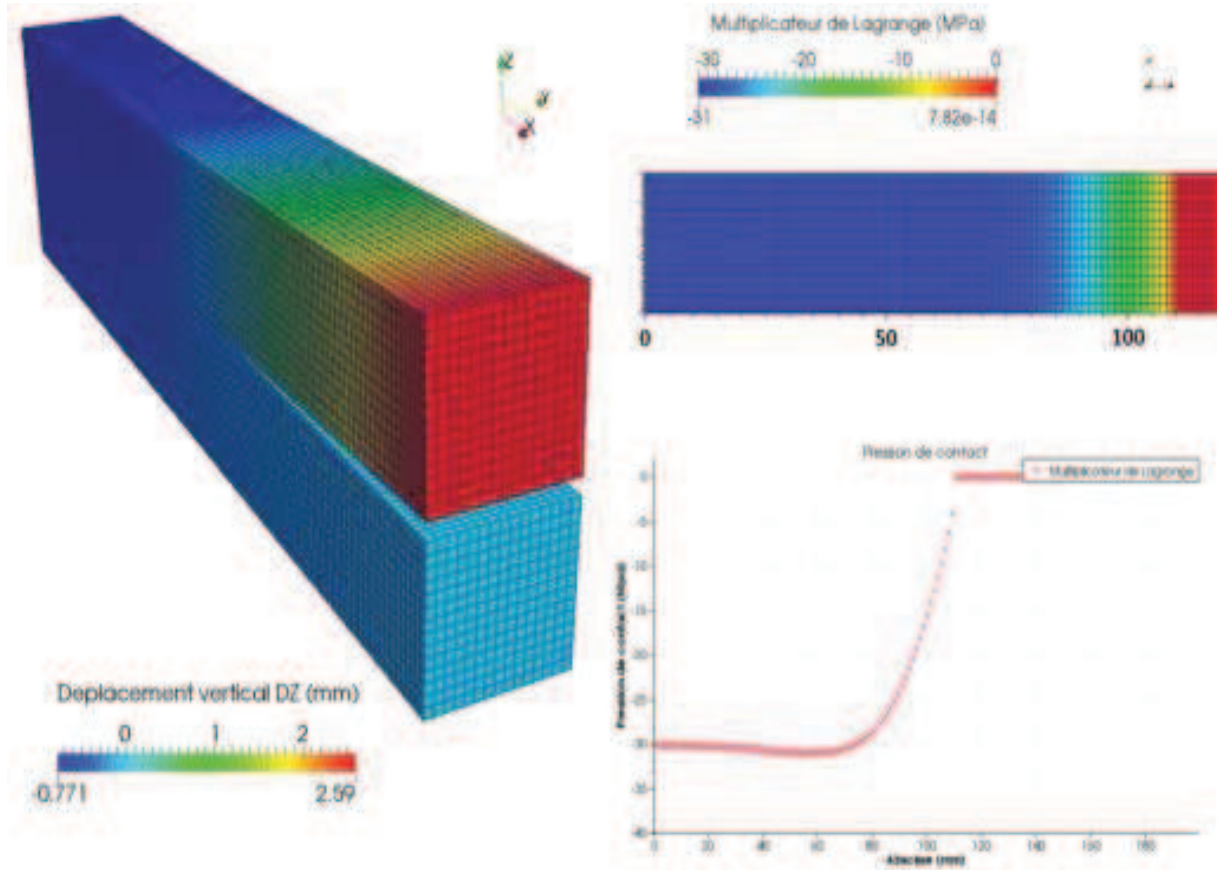


FIGURE 5.22 – Résultats de référence obtenus par la méthode Continue avec maillage compatible linéaire.

Analyse des résultats sur des maillages incompatibles

Les résultats obtenus par la méthode LAC sont présentés dans les Figures 5.23 et 5.25, les résultats obtenus par la méthode Continue sont présentés dans les Figures 5.24 et 5.26 (de haut en bas champ de déplacement composante u_z sur la configuration déformée, multiplicateur de Lagrange en fonction de l’abscisse du centre de la macro-maille ou du DDL de contact). Les résultats obtenus par les deux méthodes concordent globalement bien au niveau des déplacements, la zone de décollement est la même pour les deux méthodes. Cependant, on remarque l’absence des fortes oscillations parasites au niveau des Lagrangiens de contact de la méthode LAC (si l’on exclut le cas des tétraèdres à 4 nœuds, voir Remarque 5.3). La méthode LAC approche toutes les valeurs de référence à moins de 1.5% d’erreur, mis à part les valeurs de u_z^{max} pour les cas maillés avec des mailles linéaires (et particulièrement le cas maillé en tétraèdres à 4 nœuds où la “rigidité” des éléments utilisés et le niveau de finesse du maillage ne permettent pas d’obtenir une bonne approximation), voir Tableau 5.9. On observe les mêmes niveaux d’erreur et de comportement sur les maillages linéaires pour la méthode Continue lorsque l’on considère les valeurs de références u_z^{min} et u_z^{max} . Par contre, cette méthode de type “collocation” est mise en défaut au niveau des Lagrangiens de contact, on observe jusqu’à 16% d’écart avec la valeur de référence λ^{min} , ceci étant dû à l’incompatibilité des maillages (voir Tableau 5.10).

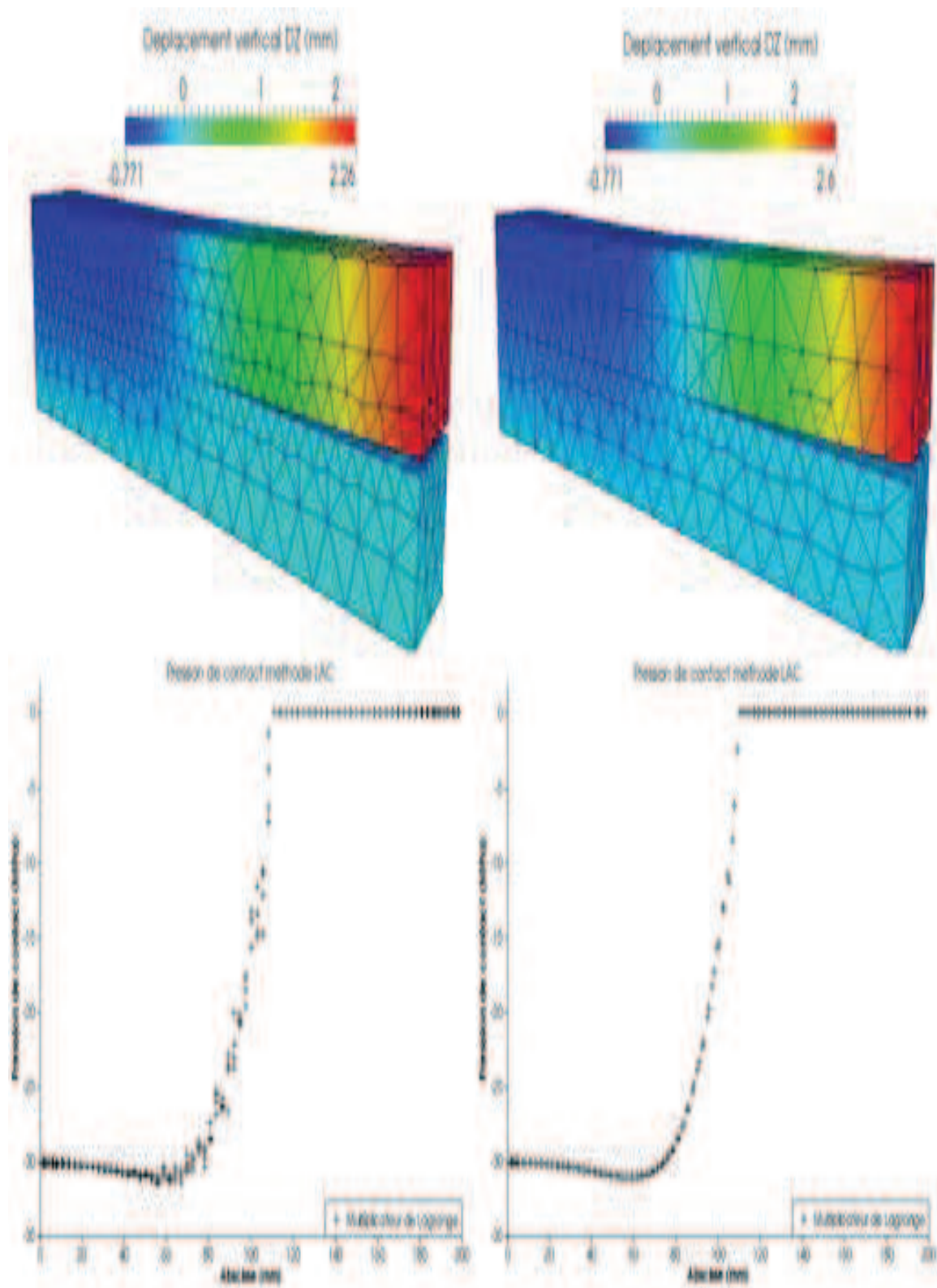


FIGURE 5.23 – Résultats pour des maillages en éléments linéaires et quadratiques tétraédriques (Méthode LAC), tétraèdres à 4 nœuds (à gauche) et tétraèdres à 10 nœuds (à droite).

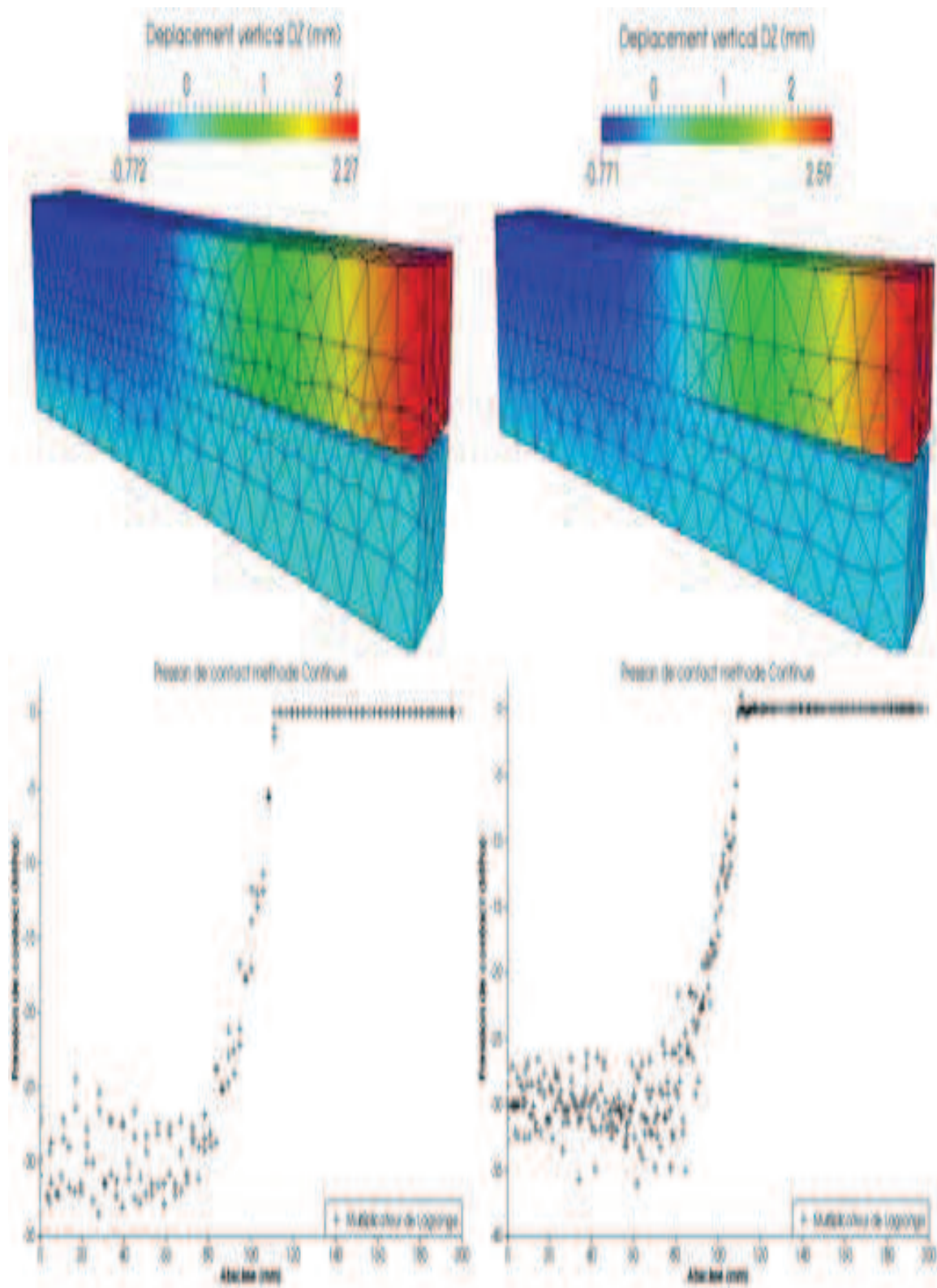


FIGURE 5.24 – Résultats pour des maillages en éléments linéaires et quadratiques tétraédriques (Méthode Continue), tétraèdres à 4 nœuds (à gauche) et tétraèdres à 10 nœuds (à droite).

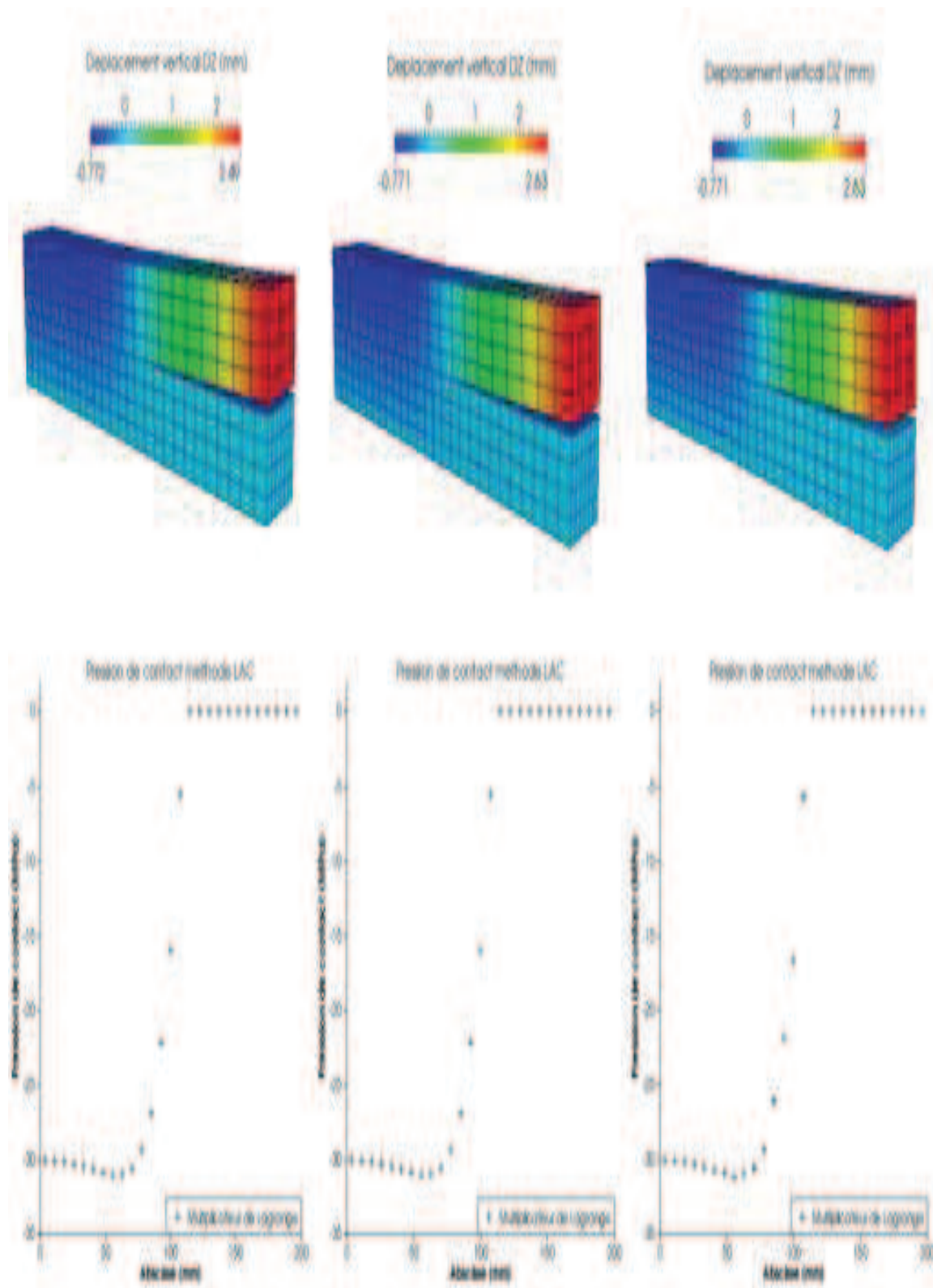


FIGURE 5.25 – Résultats pour des maillages en éléments linéaires et quadratiques hexaédriques (Méthode LAC), hexaèdres à 8 nœuds (à gauche), hexaèdres à 20 nœuds (au milieu) et hexaèdres à 27 nœuds (à droite).

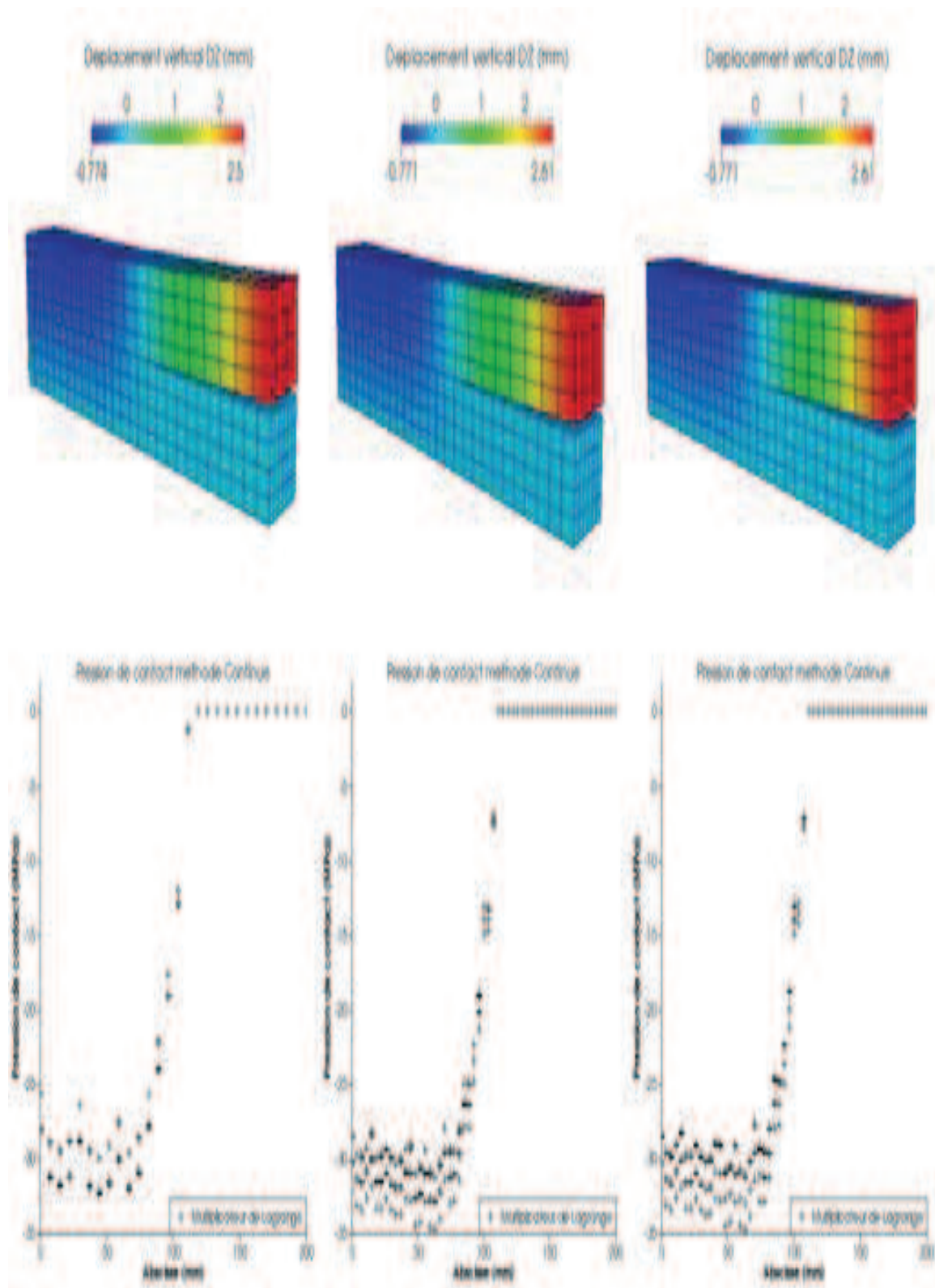


FIGURE 5.26 – Résultats pour des maillages en éléments linéaires et quadratiques hexaédriques (Méthode Continue), hexaèdres à 8 nœuds (à gauche), hexaèdres à 20 nœuds (au milieu) et hexaèdres à 27 nœuds (à droite).

Éléments	Erreur relative λ^h	Erreur relative u_z^h	
	λ^{ref} minimum	u_z^{ref} minimum	u_z^{ref} maximum
TETRA 4	1.28%	0.03%	12.92%
TETRA 10	0.07%	0.01%	0.09%
HEXA 8	0.36%	0.21%	4.13%
HEXA 20	0.02%	$5.8 \cdot 10^{-3}\%$	1.10%
HEXA27	0.02%	$7.1 \cdot 10^{-3}\%$	1.11%

TABLE 5.9 – Erreur relative en pression de contact et en déplacement vertical u_z^{ref} minimum et maximum pour la méthode LAC.

Éléments	Erreur relative λ^h	Erreur relative u_z^h	
	λ^{ref} minimum	u_z^{ref} minimum	u_z^{ref} maximum
TETRA 4	7.89%	0.16%	12.6%
TETRA 10	16.03%	0.02%	0.05%
HEXA 8	4.23%	0.49%	3.79%
HEXA 20	11.64%	0.03%	0.55%
HEXA 27	11.99%	0.04%	0.59%

TABLE 5.10 – Erreur relative en pression de contact et en déplacement vertical u_z^{ref} minimum et maximum pour la méthode Continue.

Remarque 5.3. Dans le cas linéaire des tétraèdres à 4 nœuds, on remarque une qualité des résultats moindre par rapport au cas quadratique. En effet, on observe quelques oscillations parasites au niveau de la zone de transition contact non-contact. Le couple $P^1/P^0(T^M)$ dans le cas d’une zone de contact courbe (la zone de transition contact/non-contact n’est pas plane) montre certaines limites. En effet, on évalue uniquement le contact moyen sur des surfaces planes qui ne peuvent pas approcher la géométrie de manière suffisamment correcte (si le maillage n’est pas très fin) contrairement au cas $P^2/P^0(T^M)$. On note cependant que les résultats restent acceptables. De plus, pour pallier le problème des oscillations sur le multiplicateur de Lagrange de contact, on peut considérer la pression de contact extrapolée à partir du tenseur des contraintes de Cauchy. De la même manière, les résultats de la méthode Continue en terme de pression de contact peuvent être lissés de manière à les rendre plus acceptables.

Ce second test permet de valider les choix algorithmiques de gestion des statuts dans le cas 2D et 3D, la méthode permet bien le décollement entre les deux poutres. De plus, on remarque que, sous réserve de bien décrire la géométrie du problème, on arrive à obtenir une pression de contact sans aucune oscillation parasite et donc à bien approcher la solution de référence de manière qualitative et quantitative contrairement aux résultats obtenus par des méthodes de type “collocation” qui exhibent de plus ou moins fortes oscillations au niveau des pressions de contact. On commence aussi à entrevoir les limitations de la méthode dans le cas des maillages linéaires lorsque que l’on veut approcher des problèmes avec interface de contact non plane. En effet, on a pu observer quelques oscillations dans le cas 3D avec maillage relativement grossier en tétraèdre à 4 nœuds. On suppose donc que la méthode LAC nécessite de décrire la géométrie de la zone de contact le plus fidèlement possible afin d’obtenir des résultats de qualité semblable à ceux obtenus par les méthodes

de type “mortar”.

5.1.2.3 Contact de Hertz

Cas 2D

Les résultats obtenus par la méthode LAC sont présentés dans les Figures 5.27 et 5.29, ceux obtenus par la méthode Continue sont présentés dans les Figures 5.28 et 5.30 (de haut en bas, composante σ_{yy} du tenseur des contraintes de Cauchy, contrainte de Von Mises sur la configuration déformée et multiplicateur de Lagrange et solution analytique interpolée). Dans ce cas de figure 2D, les résultats des deux méthodes sont sensiblement identiques mis à part certaines légères oscillations pour les cas quadratiques lorsque l’on considère les multiplicateurs de Lagrange issus de la méthode Continue. Les erreurs relatives avec les valeurs d’intérêts sont présentées dans les Tableaux 5.11 et 5.12.

Éléments	Erreur relative λ^h	Erreur relative $ \sigma_n^h $ maximum		Oscillations des Lagrangiens
	λ^{ref} minimum	surface esclave	surface maitre	
TRIA3	0.49%	0.95%	1.32%	Non perceptibles
TRIA6	0.06%	0.73%	0.16	Non perceptibles
QUAD4	0.54%	5.07%	7.21%	Non perceptibles
QUAD8	0.05%	0.7%	1.42%	Non perceptibles

TABLE 5.11 – Erreur relative en pression de contact minimum (multiplicateur de Lagrange et σ_n^h) et présence d’oscillations pour la méthode LAC.

Éléments	Erreur relative λ^h	Erreur relative $ \sigma_n^h $ maximum		Oscillations des Lagrangiens
	λ^{ref} minimum	surface esclave	surface maitre	
TRIA3	0.92%	1.33%	11.18%	Non perceptibles
TRIA6	11.6%	0.02%	29.97%	Faibles
QUAD4	1.66%	4.76%	17.5%	Non perceptibles
QUAD8	1.8%	0.38%	4.89%	Très Faibles

TABLE 5.12 – Erreur relative en pression de contact minimum (multiplicateur de Lagrange et σ_n^h) et présence d’oscillations pour la méthode Continue.

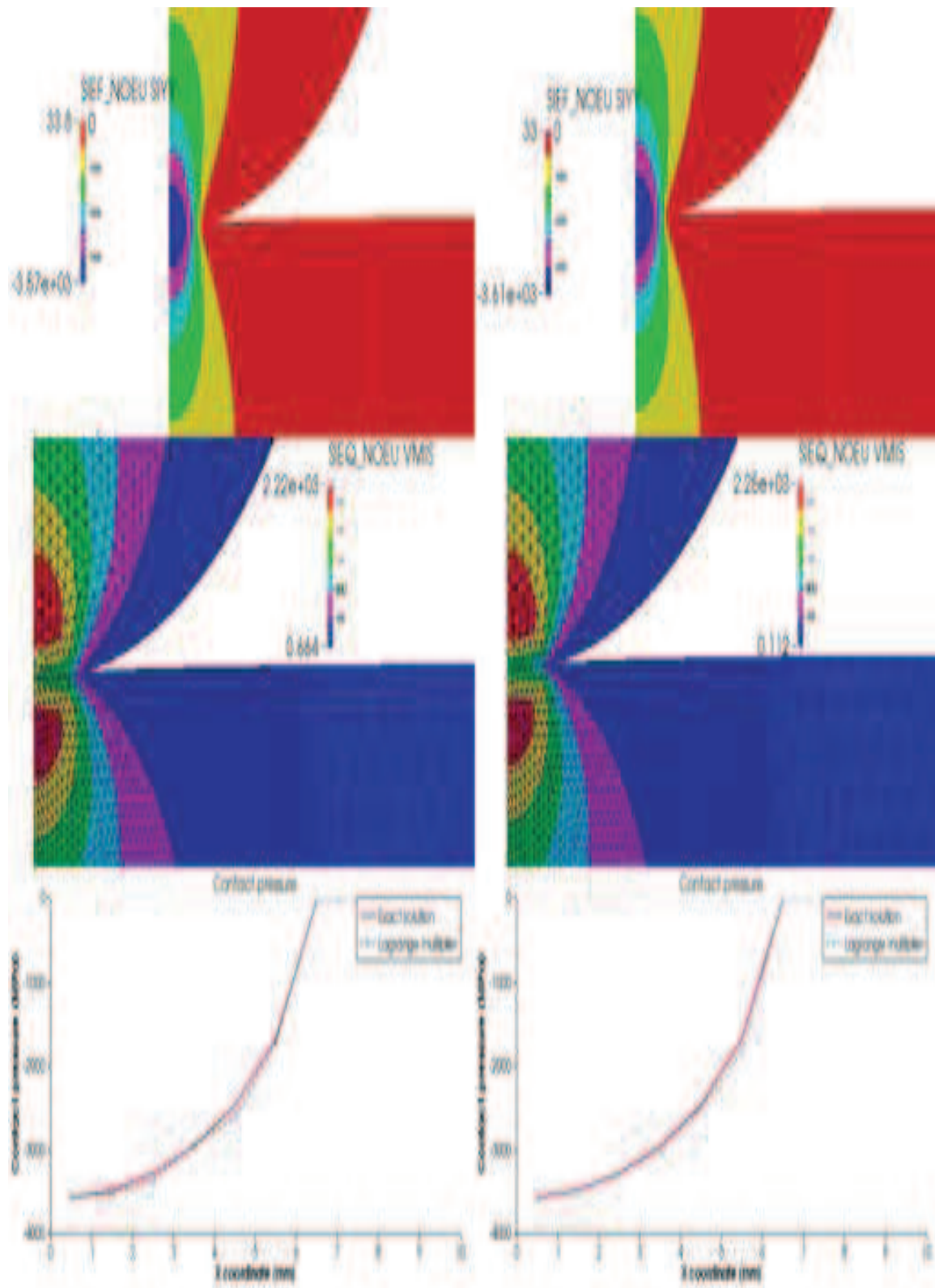


FIGURE 5.27 – Résultats pour des maillages en triangles linéaires et quadratiques (Méthode LAC), triangles à 3 nœuds (à gauche) et triangles à 6 nœuds (à droite).

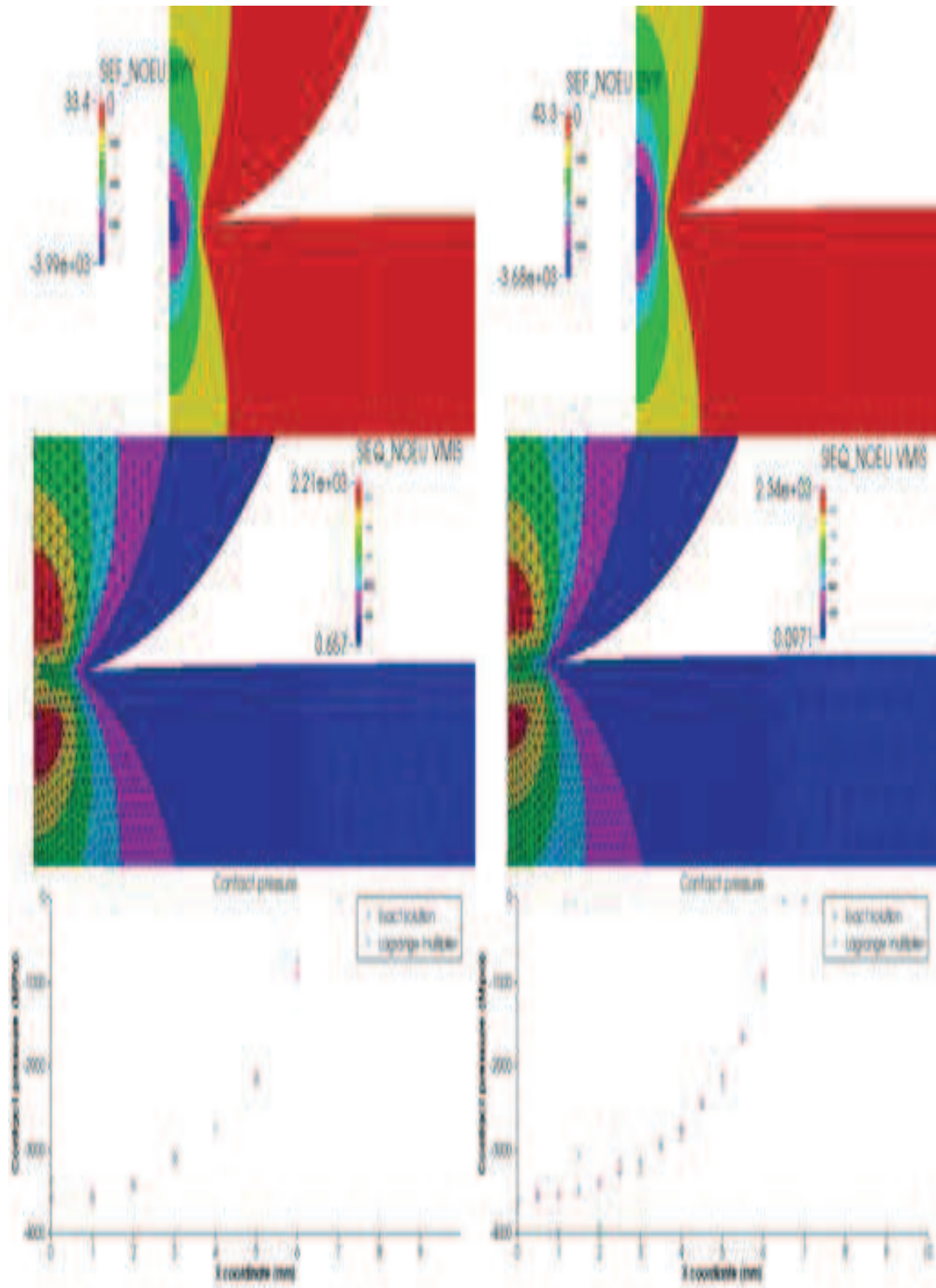


FIGURE 5.28 – Résultats pour des maillages en triangles linéaires et quadratiques (Méthode Continue), triangles à 3 nœuds (à gauche) et triangles à 6 nœuds (à droite).

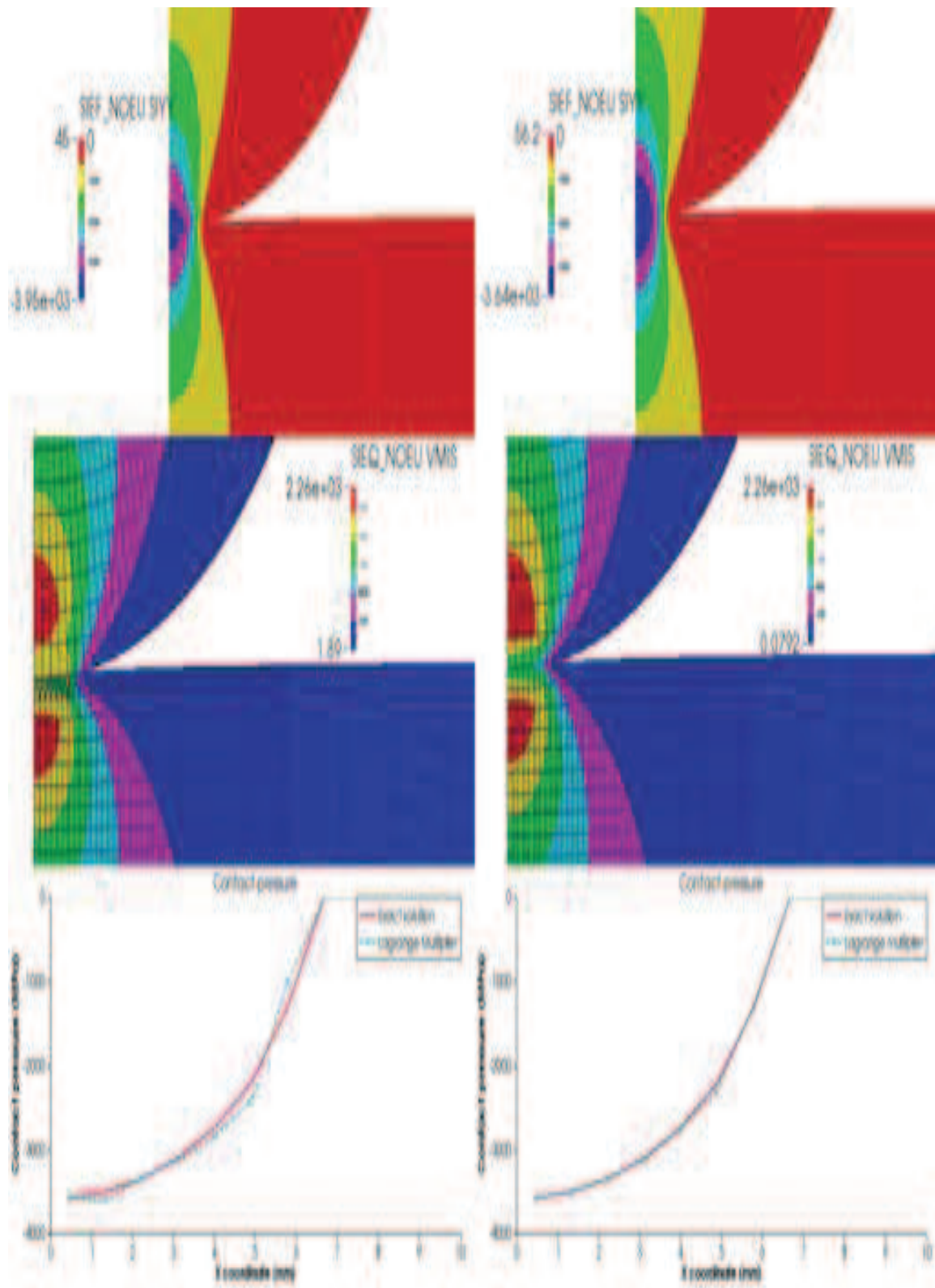


FIGURE 5.29 – Résultats pour des maillages en quadrangles linéaires et quadratiques (Méthode LAC), quadrangles à 4 nœuds (à gauche) et quadrangles à 8 nœuds (à droite).

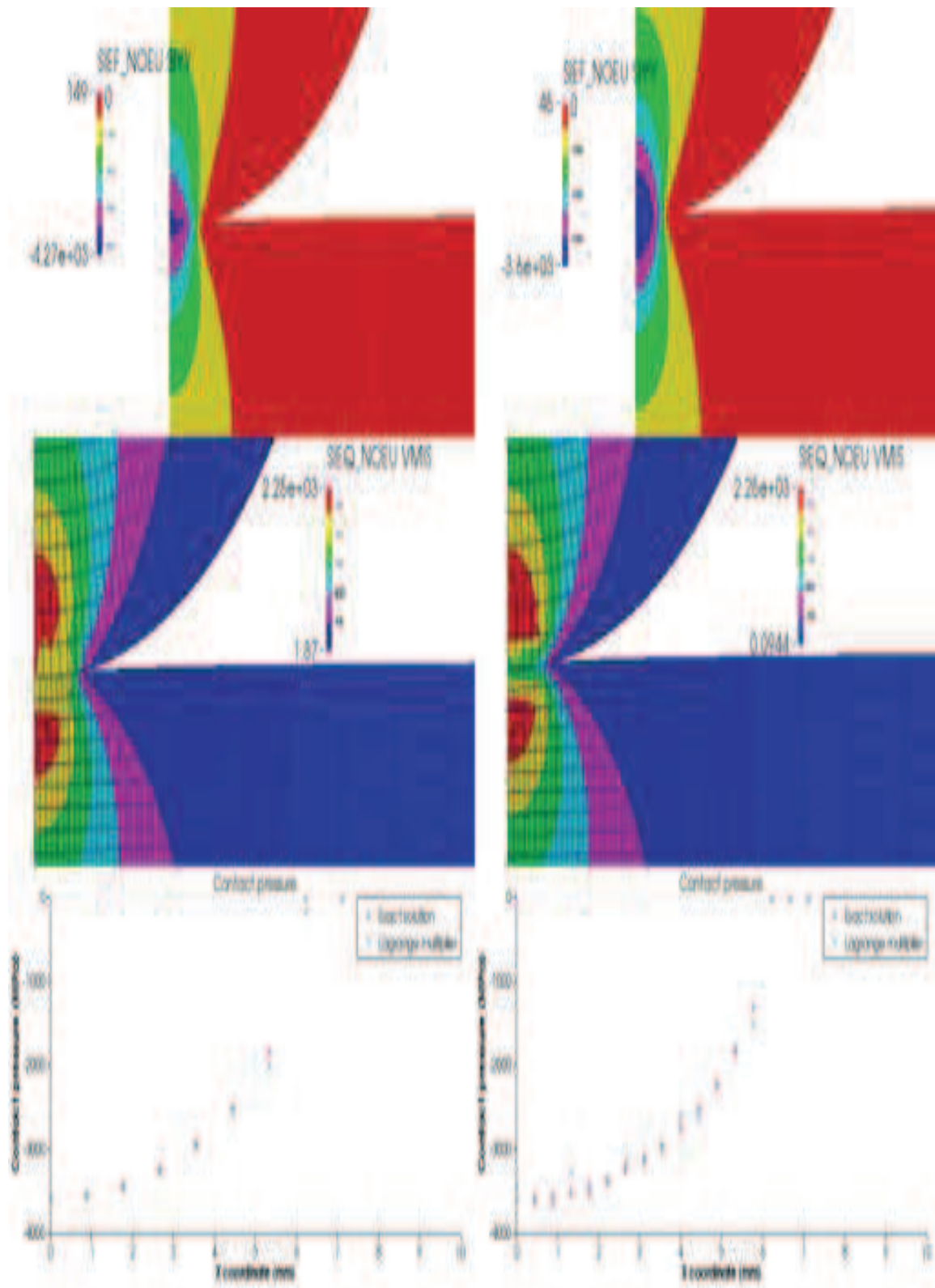


FIGURE 5.30 – Résultats pour des maillages en quadrangles linéaires et quadratiques (Méthode Continue), quadrangles à 4 nœuds (à gauche) et quadrangles à 8 nœuds (à droite).

Le maximum des contraintes de Von Mises est bien localisé sous la peau de la zone de contact. Cependant on remarque quelques artefacts parasites pour la méthode Continue lorsque l’on considère des maillages en quadrangle à 4 nœuds ou en triangle à 6 nœuds. Du fait du plus grand nombre de DDL de contact présents avec la méthode Continue (l’espace trace esclave possède plus de DDL que l’espace $P^0(T^M)$), la détection de la demi largeur de la zone de contact est plus précise avec la méthode continue (un raffinement du maillage utilisé pour la méthode LAC permettrait d’obtenir des résultats plus précis).

Cas 3D

Les résultats obtenus par la méthode LAC sont présentés dans les Figures 5.31 et 5.33, ceux obtenus par la méthode Continue en utilisant un schéma nodal sont présentés dans les Figures 5.32 et 5.34 (de haut en bas, contrainte de Von Mises sur la déformée, multiplicateur de Lagrange et solution analytique interpolée). Les résultats obtenus par la méthode continue présentent de fortes oscillations en pression de contact (multiplicateur de Lagrange) sauf pour le cas maillé en hexaèdres à 8 nœuds. La méthode LAC, quant à elle, présente des oscillations pour les pressions de contact uniquement dans le cas maillé en tétraèdres à 4 nœuds. Les deux méthodes permettent d’obtenir une bonne localisation du maximum des contraintes de Von Mises.

Éléments	Erreur relative λ^h	Erreur relative σ_n^h minimum		Oscillations des Lagrangiens
	λ^{ref} minimum	surface esclave	surface maitre	
TETRA 4	8.88%	5.33%	2.85%	Importantes
TETRA 10	1.95%	2.06%	2.10%	Non perceptibles
HEXA 8	3.28%	7.42%	7.12%	Non perceptibles
HEXA 20	2.90%	3.54 %	3.91%	Non perceptibles
HEXA 27	2.29%	3.28%	2.48%	Non perceptibles

TABLE 5.13 – Erreur relative en pression de contact minimum (multiplicateur de Lagrange et σ_n^h) et présence d’oscillations pour la méthode LAC.

Éléments	Erreur relative λ^h	Erreur relative σ_n^h minimum		Oscillations des Lagrangiens
	λ^{ref} minimum	surface esclave	surface maitre	
TETRA 4	43.08%	8.64%	30.18%	Importantes
TETRA 10	27.6%	3.6%	21.9%	Très importantes
HEXA 8	2.97%	9.58%	24.43%	Faibles
HEXA 20	13.14%	8%	10.95%	Importantes
HEXA 27	21.72%	6.11%	24.43%	Très importantes

TABLE 5.14 – Erreur relative en pression de contact minimum (multiplicateur de Lagrange et σ_n^h) et présence d’oscillations pour la méthode Continue.

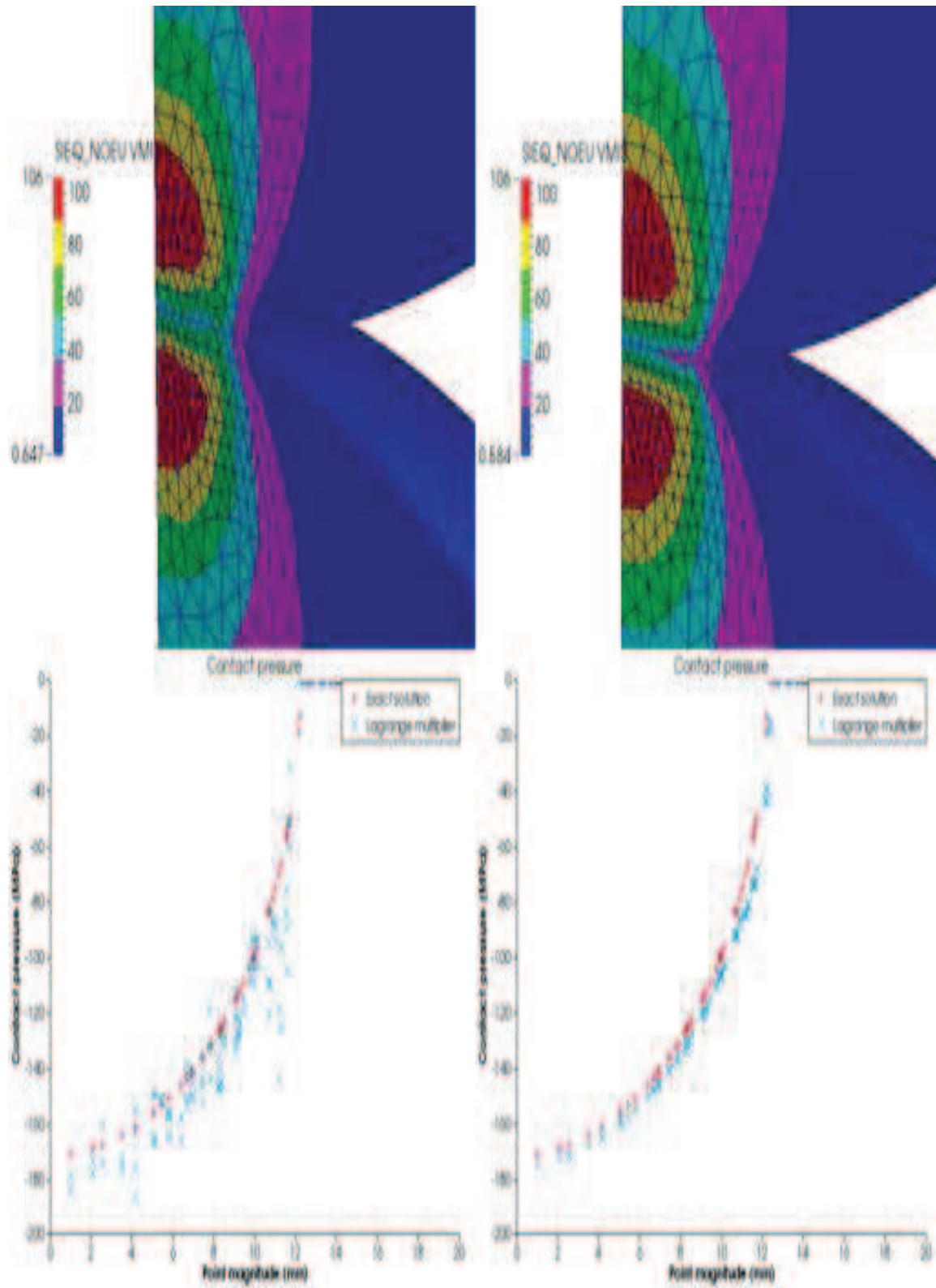


FIGURE 5.31 – Résultats pour des maillages en tétraèdres linéaires et quadratiques (Méthode LAC), tétraèdres à 4 nœuds (à gauche) et tétraèdres à 10 nœuds (à droite).

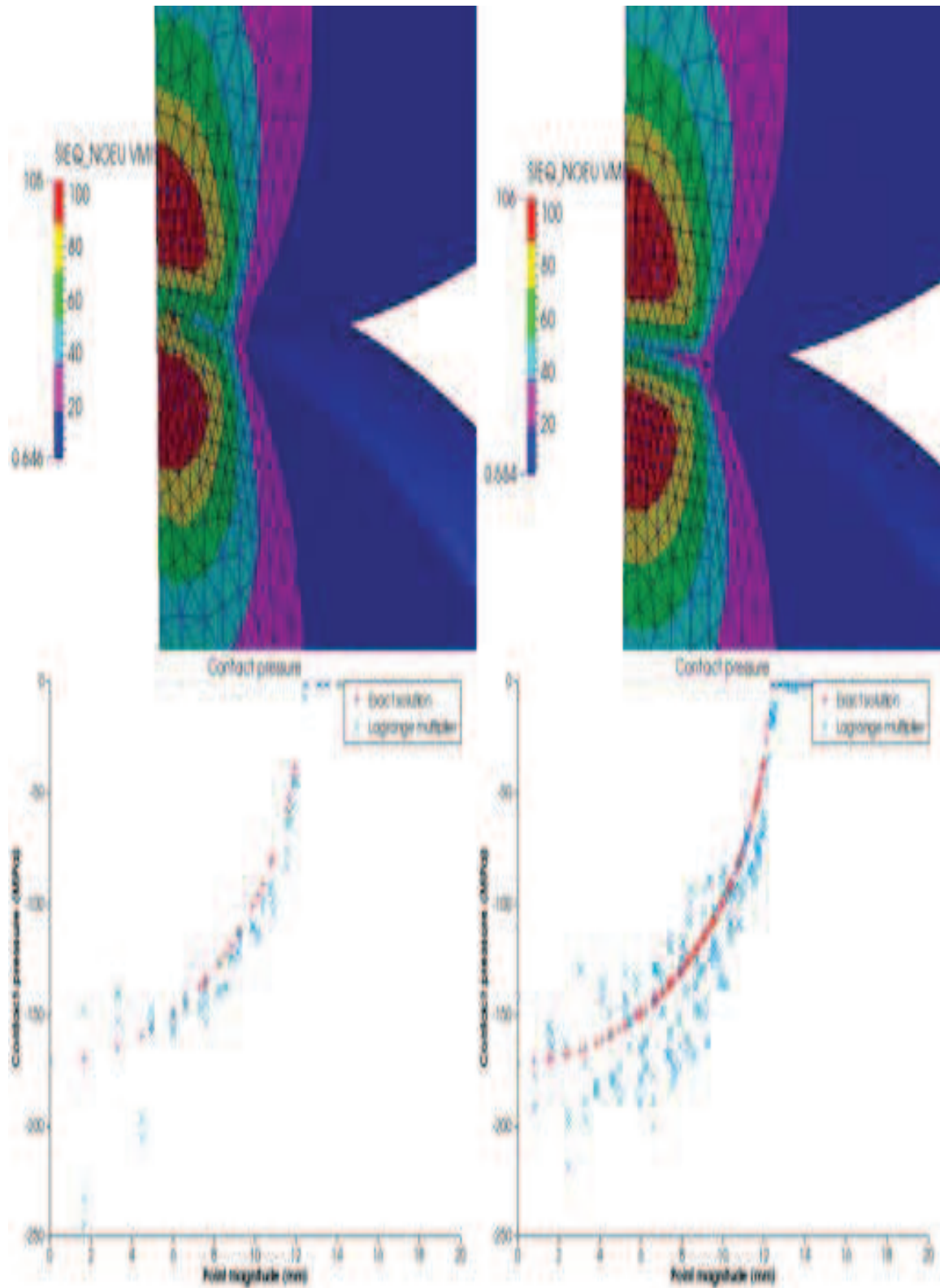


FIGURE 5.32 – Résultats pour des maillages en tétraèdres linéaires et quadratiques (Méthode Continue), tétraèdres à 4 nœuds (à gauche) et tétraèdres à 10 nœuds (à droite).

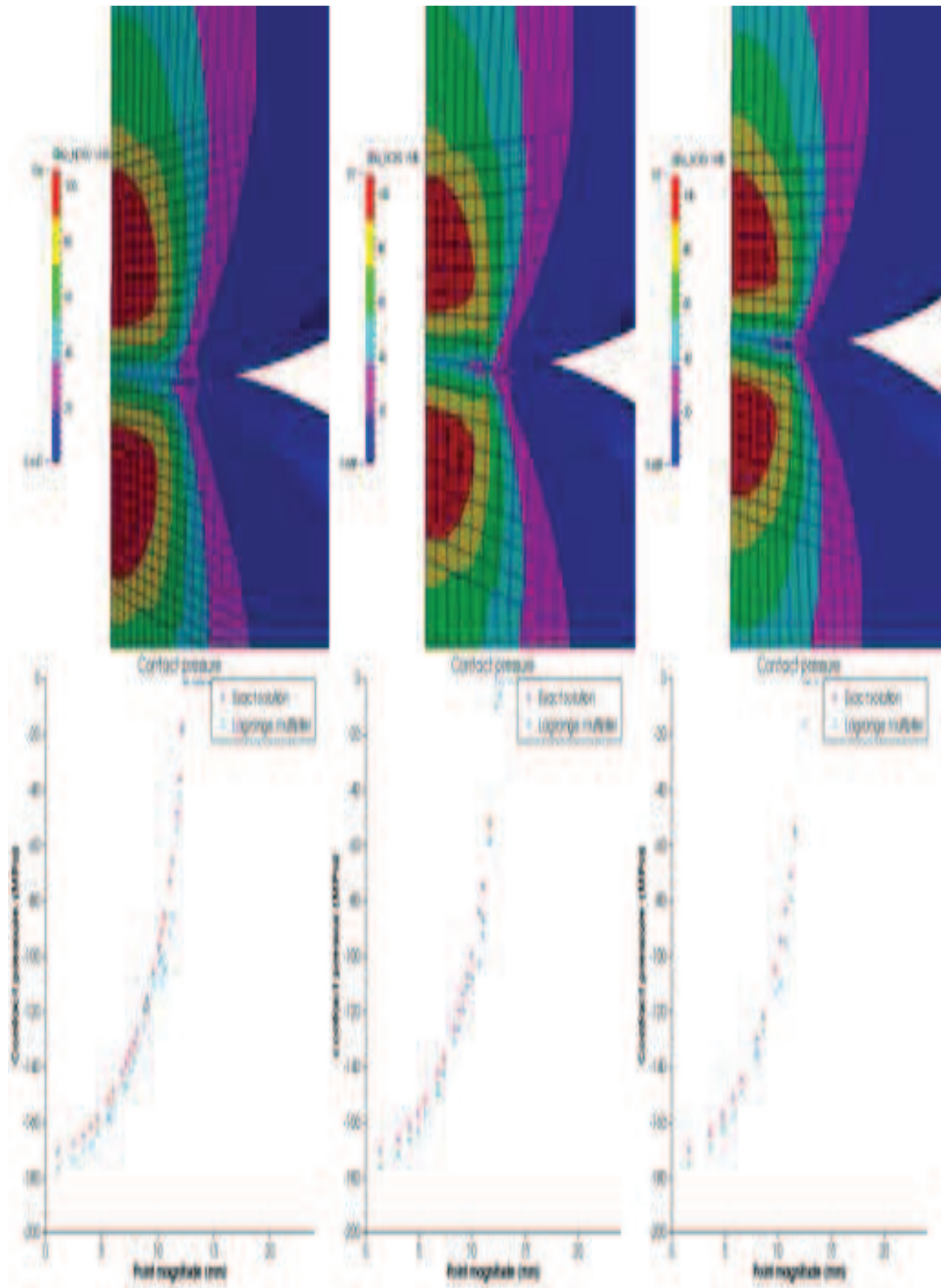


FIGURE 5.33 – Résultats pour des maillages en hexaèdres linéaires et quadratiques (Méthode LAC), hexaèdres à 8 nœuds (à droite), hexaèdres à 20 nœuds (au milieu), et hexaèdres à 27 nœuds (à gauche).

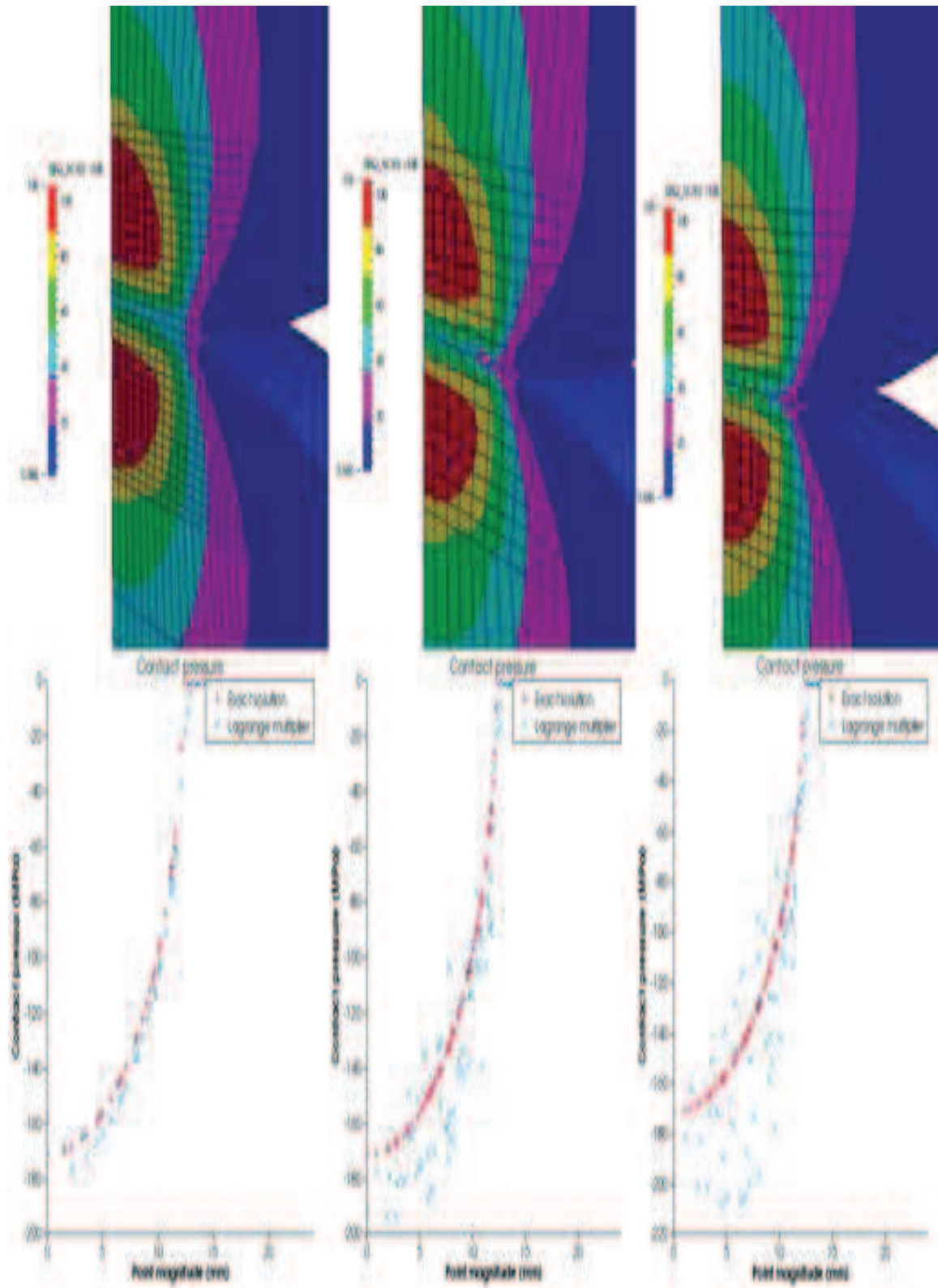


FIGURE 5.34 – Résultats pour des maillages en hexaèdres linéaires et quadratiques (Méthode Continue), hexaèdres à 8 nœuds (à droite), hexaèdres à 20 nœuds (au milieu), et hexaèdres à 27 nœuds (à droite).

La méthode LAC ne se comporte pas aussi bien en linéaire qu’en quadratique sur ce cas test, on retrouve le défaut mis en évidence lors du test précédent. Le couple d’espace $P^1/P^0(T^M)$ ne permet pas d’obtenir une bonne approximation du problème. On remarque que la régularité du maillage en hexaèdre à 8 nœuds et la plus grande flexibilité de ses éléments de bords permettent d’obtenir une pression sans oscillations dans ce cas. Les erreurs relatives avec les valeurs d’intérêts sont présentées dans les Tableaux 5.13 et 5.14.

On se propose maintenant d’observer les pressions de contact extrapolées à partir du tenseur des contraintes de Cauchy (voir Figures 5.35 et 5.36). On remarque que les résultats obtenus par la méthode LAC ne présentent aucune oscillation, même pour le cas maillé en tétraèdres à 4 nœuds. Les résultats obtenus par la méthode Continue ont quant à eux été lissés, l’amplitude et la fréquence des oscillations de la pression côté esclave ont été fortement diminuées. Cependant, les oscillations sont encore présentes et la pression de contact du côté maître n’est pas égale à celle du côté esclave contrairement à ce que l’on peut observer pour les résultats issus de la méthode LAC. On ne respecte donc pas la contrainte d’égalité entre les pressions de contact maître et esclave.

Remarque 5.4. Dans tous les cas, méthodes LAC et Continue confondues, on remarque qu’il existe une erreur “incompressible” avec la solution analytique. Cette erreur peut venir du fait que l’on résout le problème avec un algorithme qui prend en compte toutes les non linéarités à chaque itération de Newton. De ce fait, on dévie légèrement des conditions HPP utilisées pour définir la solution analytique. On s’écarte donc un peu du domaine de validité de cette dernière.

Sous réserve de bien décrire la géométrie du problème et donc principalement dans le cas des maillages quadratiques, la méthode LAC permet de bien approcher le problème, la plupart des paramètres physiques sont bien respectés, pression de contact minimum, égalité entre les pressions de contact maîtres et esclaves, localisation du maximum des contraintes de Von Mises. L’amélioration vis à vis des méthodes de type “collocation” est flagrante pour tous les paramètres physiques de contact. Ainsi, on arrive à lisser la plupart des oscillations et à gagner en qualité sur les résultats en pression de contact (multiplicateur de Lagrange et pression de contact extrapolée). On note que les améliorations sont nettement plus visibles dans le cas 3D. En effet, l’incompatibilité géométrique entre des mailles 1D est beaucoup moins pénalisante que celle entre des mailles 2D.

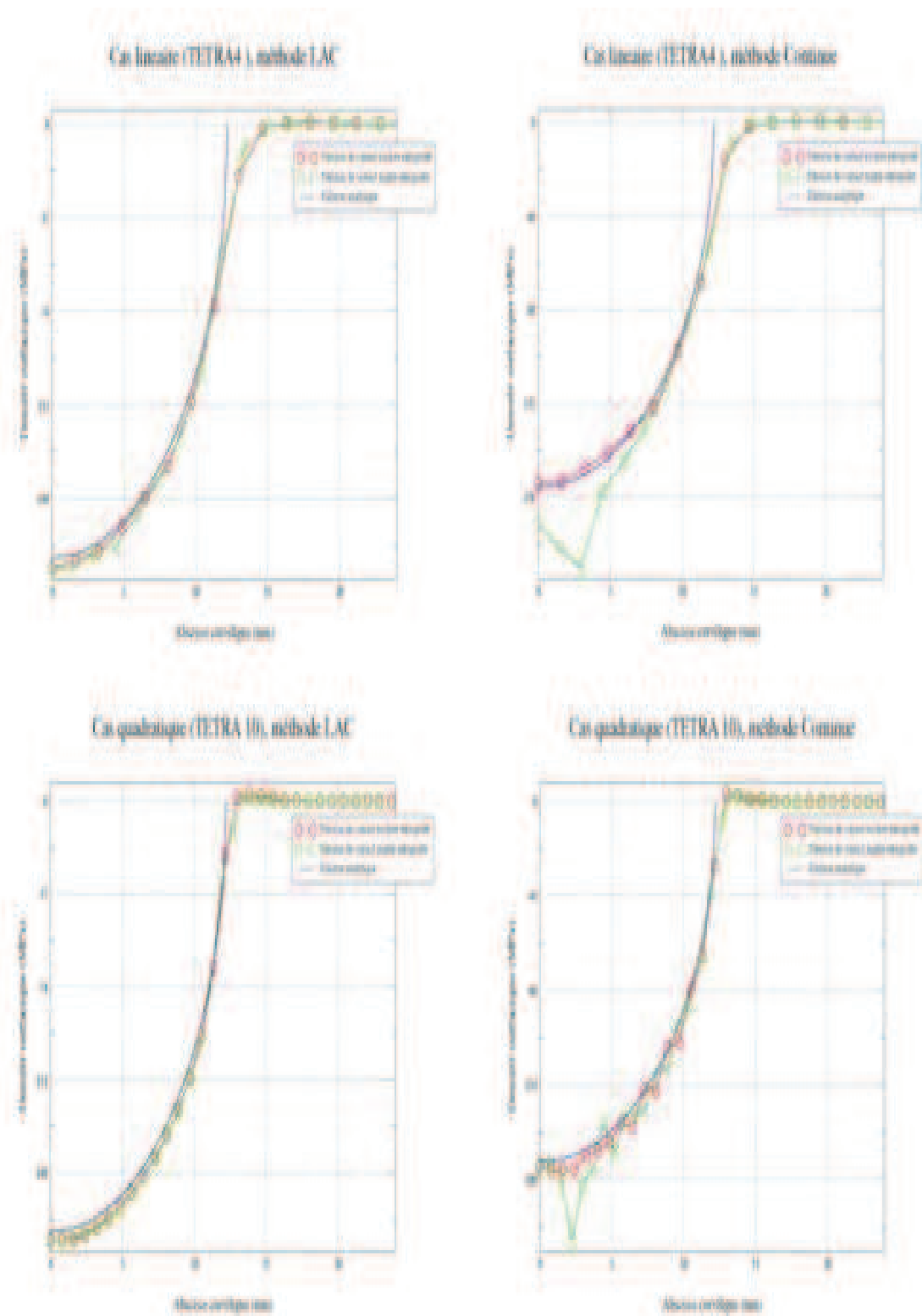


FIGURE 5.35 – Pression de contact extrapolée pour les cas maillé en tétraèdres, carré vert côté maître, cercle rouge côté esclave et ligne bleue solution analytique.

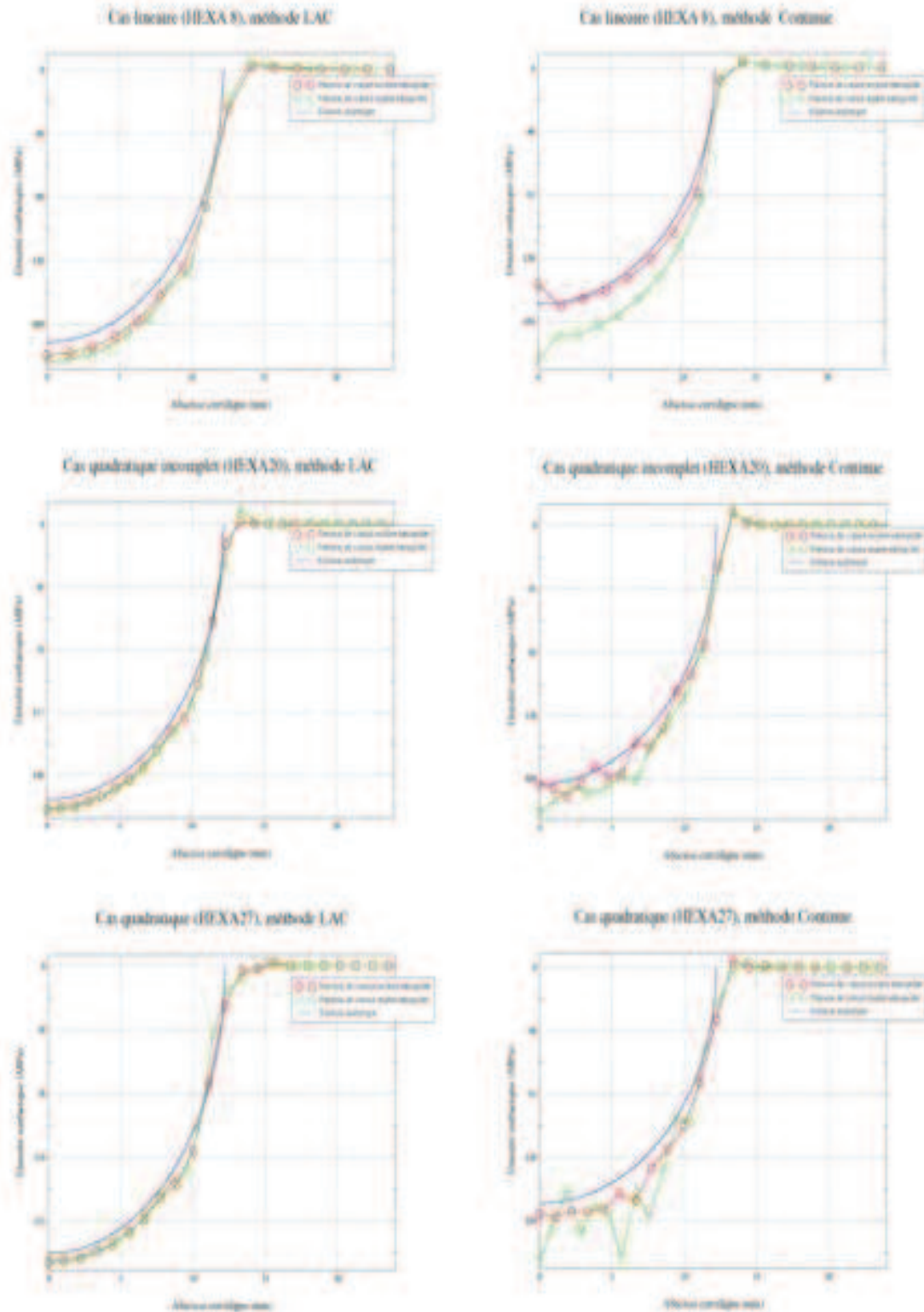


FIGURE 5.36 – Pression de contact extrapolée pour les cas maillé en hexaèdres, carré vert côté maître, cercle rouge côté esclave et ligne bleue solution analytique.

5.1.2.4 Inclusion de deux sphères creuses sous pression

Cas 2D

Les résultats obtenus par la méthode LAC sont présentés dans les Figures 5.37, 5.39, 5.41 et 5.43 ; ceux obtenus par la méthode Continue sont présentés dans les Figures 5.38, 5.40, 5.42 et 5.44 (de haut en bas, première palette : déplacement radial u_r et contrainte de Cauchy radiale σ_{rr} ; deuxième palette : Contrainte de Von Mises et multiplicateur de Lagrange en fonction de l'angle θ). Les niveaux de pression interne, de contact et externe sont décrits dans les Figures 5.45 et 5.46.

De manière logique, les résultats obtenus sur les maillages linéaires sont de mauvaise qualité quelle que soit la méthode utilisée. On ne récupère pas la continuité des contraintes de Cauchy radiales et des contraintes de Von Mises à travers la surface de contact. De plus, on observe des oscillations non négligeables sur les pressions de contact issues des multiplicateurs de Lagrange ou extrapolées. Dans le cas des maillages quadratiques, la géométrie est suffisamment bien approchée pour permettre à la méthode LAC d'obtenir des résultats pertinents. Les valeurs de référence sont bien approchées aussi bien au niveau des valeurs externes et internes de u_r et σ_{rr} et de la continuité des contraintes radiales de Cauchy et des contraintes de Von Mises à travers la surface de contact, qu'au niveau des pressions de contact qui exhibent des oscillations à moins de $10^{-2}\%$ (multiplicateur de Lagrange). Les erreurs entre les valeurs minimum et maximum des valeurs caractéristiques de pression approchées et leurs valeurs de référence sont présentées dans les Tableaux 5.15 et 5.16.

Éléments	Erreur relative $ \lambda - \lambda^h $		Erreur relative $ \sigma_{rr} - \sigma_{rr}^h $ esclave		Erreur relative $ \sigma_{rr} - \sigma_{rr}^h $ maître		Résultat du test
	λ^h min	λ^h max	σ_{rr}^h min	σ_{rr}^h max	σ_{rr}^h min	σ_{rr}^h max	
TRIA 3	4.01%	12.20%	6.07%	20.38%	14.71%	1.17%	Échec
TRIA 6	0.01%	0.02%	0.21%	1.52%	0.08%	0.43%	Succès
QUAD 4	3.46%	0.36%	2.81%	14.70%	19.08%	15.28%	Échec
QUAD 8	$1.41 \cdot 10^{-4}\%$	$1.82 \cdot 10^{-4}\%$	0.02%	0.19%	0.16%	0.37%	Succès

TABLE 5.15 – Erreur relative en pression de contact et sur σ_{rr} pour la méthode LAC.

Éléments	Erreur relative $ \lambda - \lambda^h $		Erreur relative $ \sigma_{rr} - \sigma_{rr}^h $ esclave		Erreur relative $ \sigma_{rr} - \sigma_{rr}^h $ maître		Résultat du test
	λ^h min	λ^h max	σ_{rr}^h min	σ_{rr}^h max	σ_{rr}^h min	σ_{rr}^h max	
TRIA 3	52.04%	36.78%	1.03%	17.54%	21.38%	1.74%	Échec
TRIA 6	??%	21.86%	10.37%	16.28%	77.49%	53.92%	Échec
QUAD 4	38.27%	10.03%	8.77%	17.07%	41.96%	10.79%	Échec
QUAD 8	??%	17.56%	2.88%	1.36%	3.57%	4.61%	Échec

TABLE 5.16 – Erreur relative en pression de contact et sur σ_{rr} pour la méthode Continue.

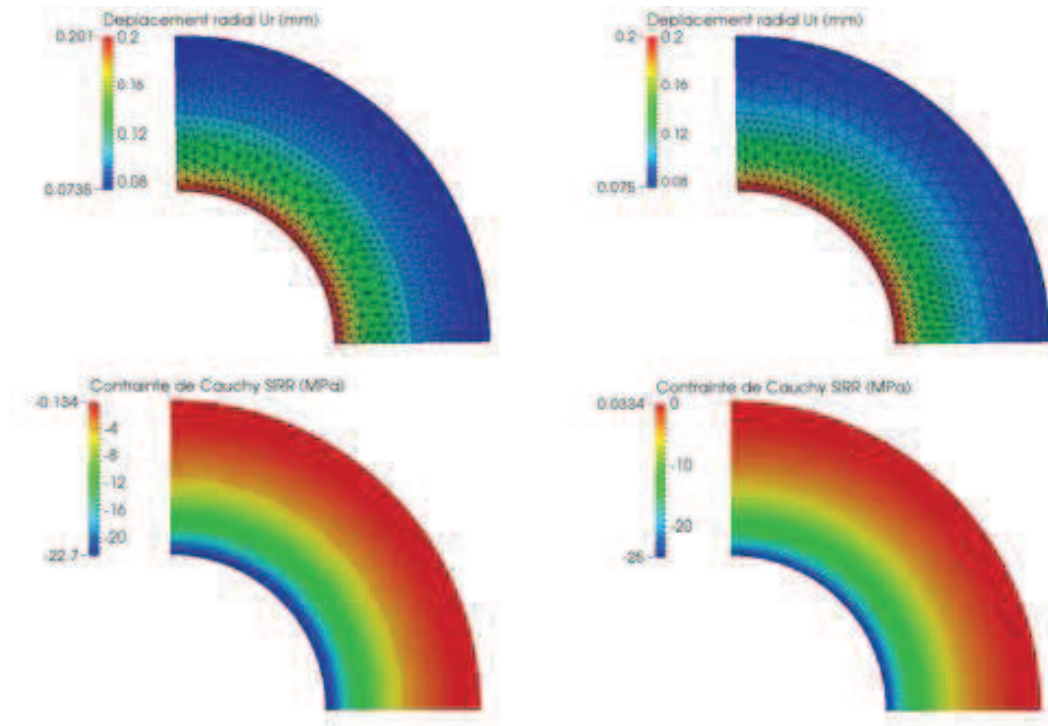


FIGURE 5.37 – Résultats pour des maillages en triangles linéaires et quadratiques (Méthode LAC), triangles à 3 nœuds (à gauche) et triangles à 6 nœuds (à droite).

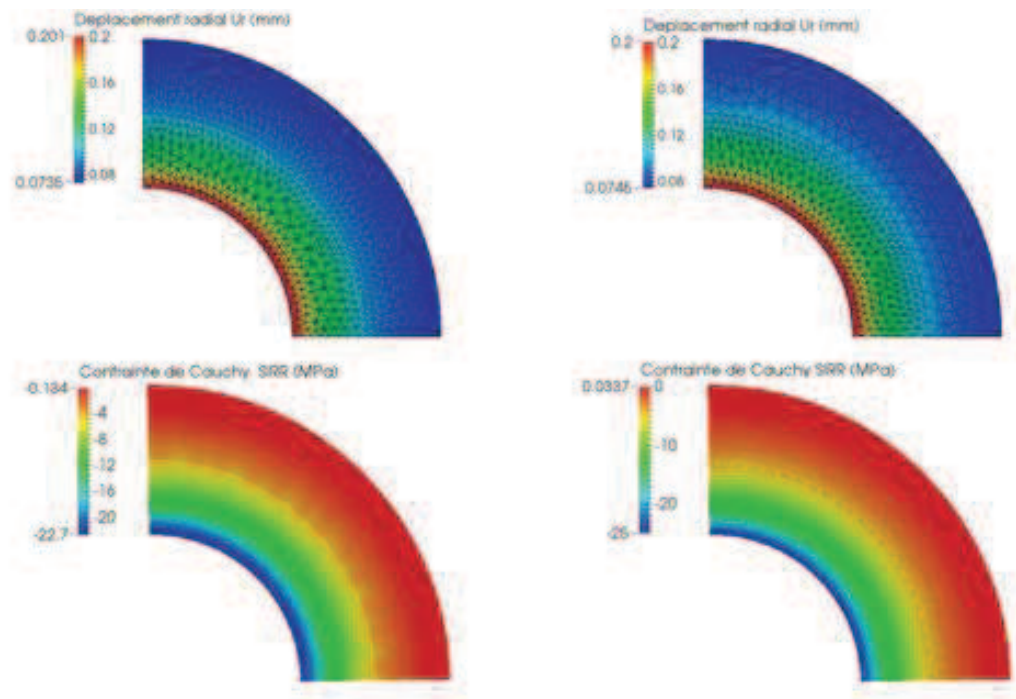


FIGURE 5.38 – Résultats pour des maillages en triangles linéaires et quadratiques (Méthode Continue), triangles à 3 nœuds (à gauche) et triangles à 6 nœuds (à droite).

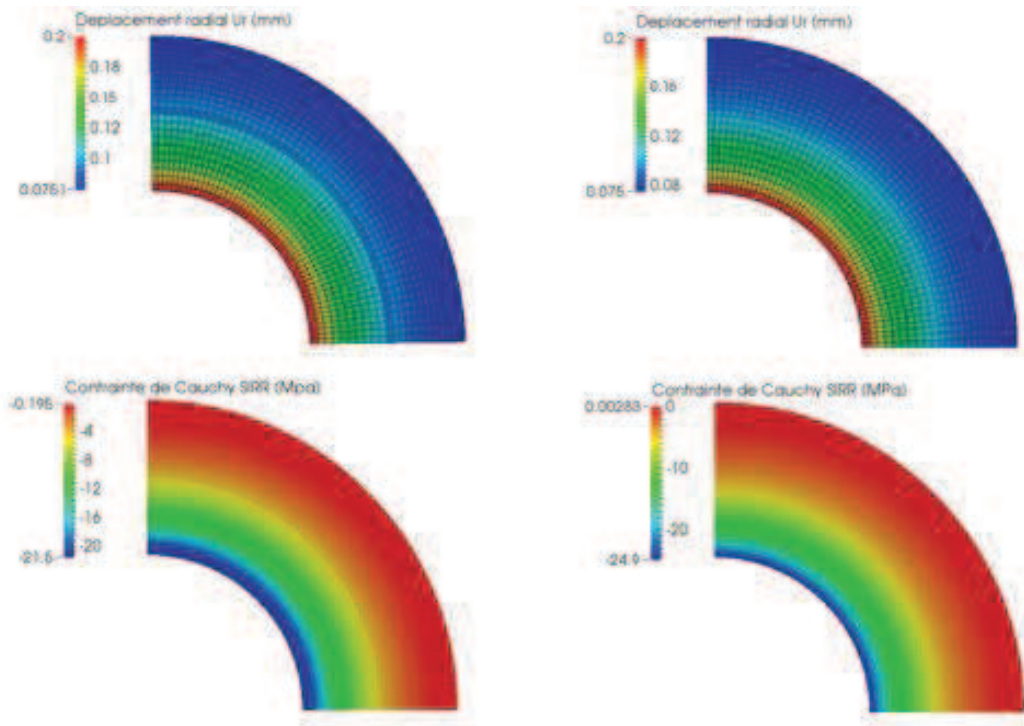


FIGURE 5.39 – Résultats pour des maillages en quadrangles linéaires et quadratiques (Méthode LAC), quadrangles à 4 nœuds (à gauche) et quadrangles à 8 nœuds (à droite).

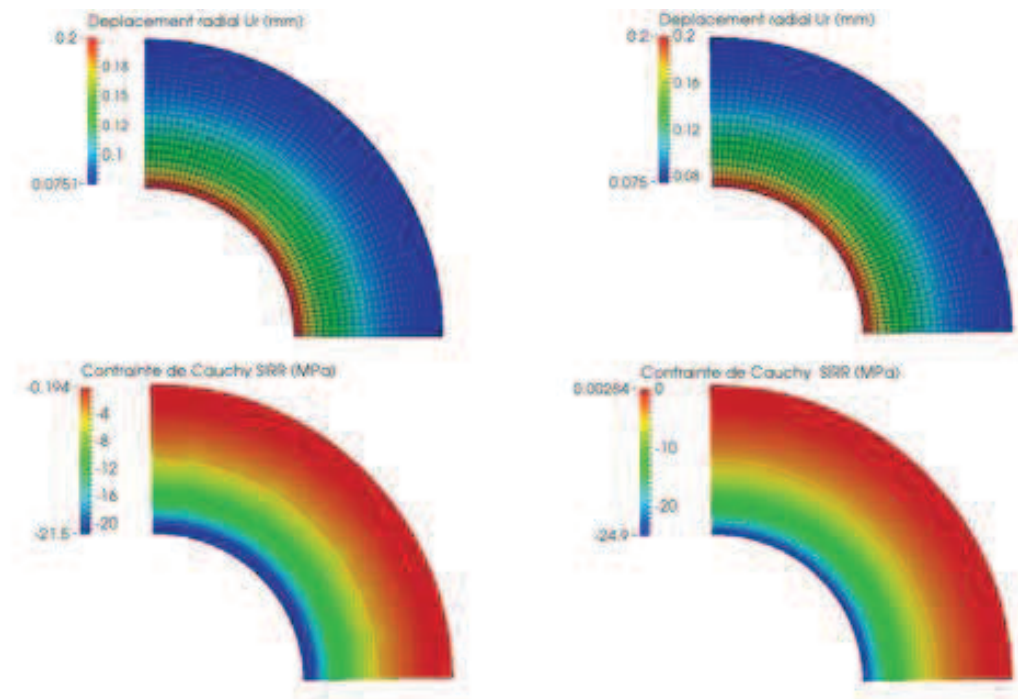


FIGURE 5.40 – Résultats pour des maillages en quadrangles linéaires et quadratiques (Méthode Continue), quadrangles à 4 nœuds (à gauche) et quadrangles à 8 nœuds (à droite).

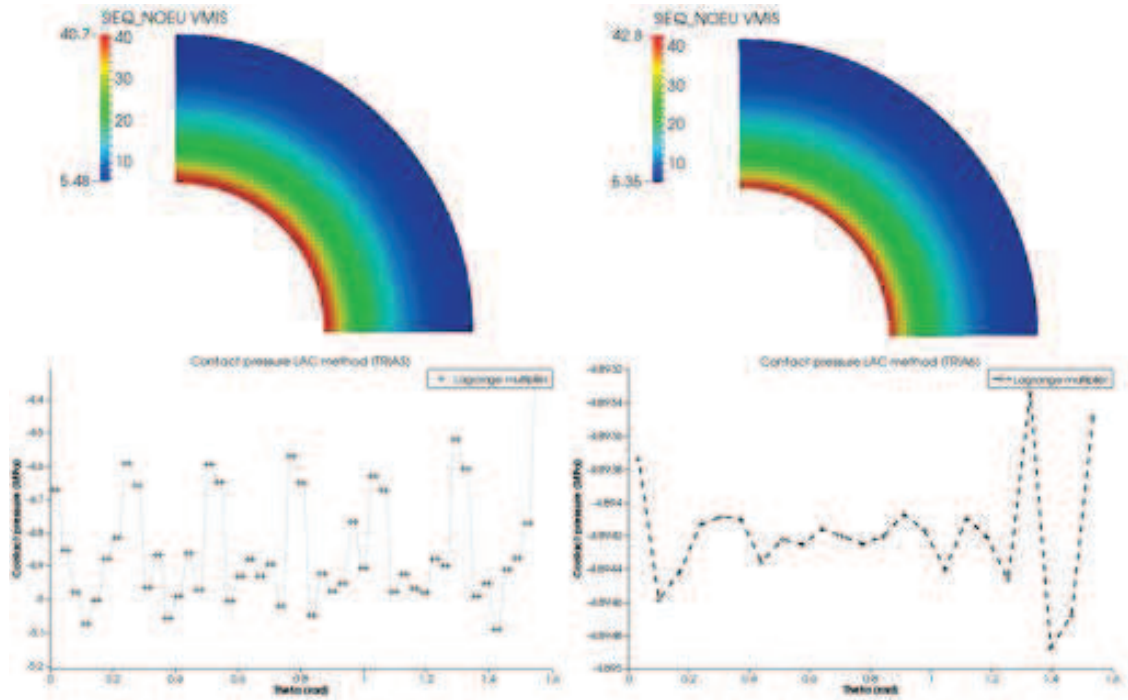


FIGURE 5.41 – Résultats pour des maillages en triangles linéaires et quadratiques (Méthode LAC), triangles à 3 nœuds (à gauche) et triangles à 6 nœuds (à droite).

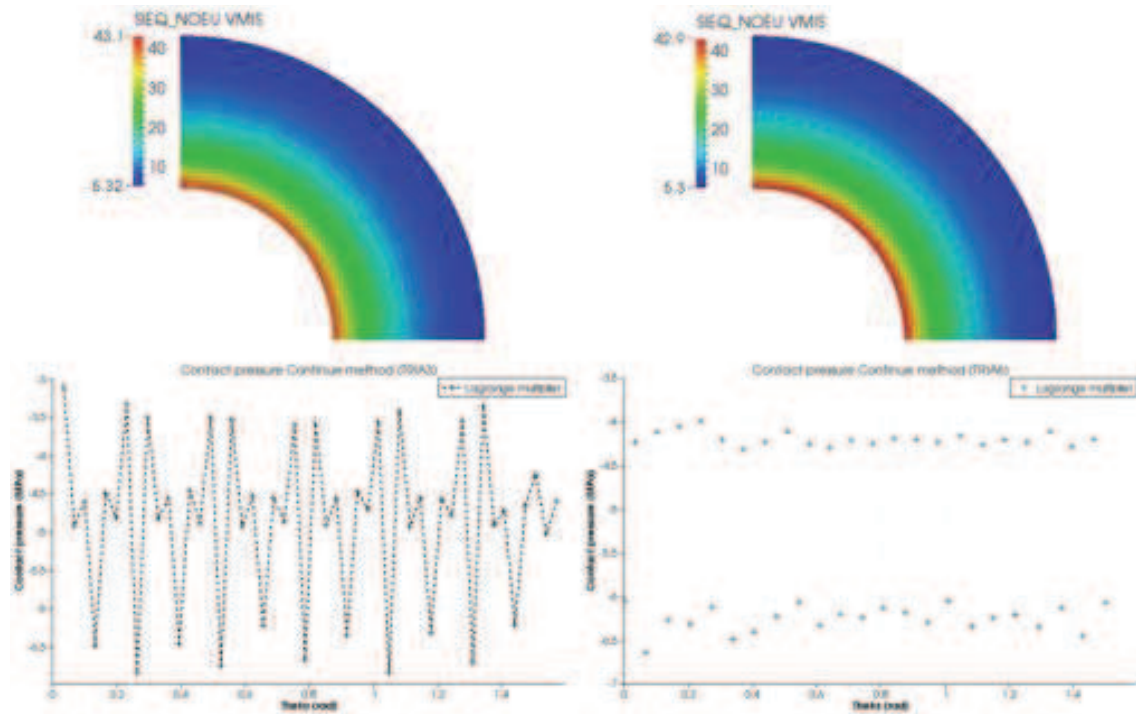


FIGURE 5.42 – Résultats pour des maillages en triangles linéaires et quadratiques (Méthode Continue), triangles à 3 nœuds (à gauche) et triangles à 6 nœuds (à droite).

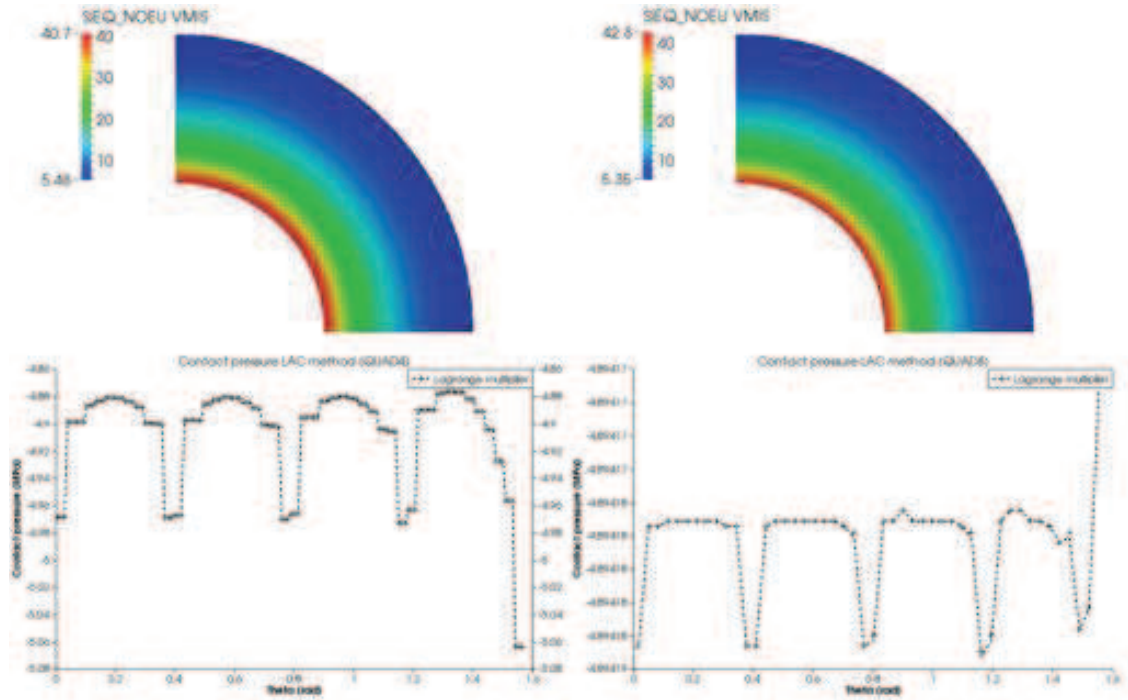


FIGURE 5.43 – Résultats pour des maillages en quadrangles linéaires et quadratiques (Méthode LAC), quadrangles à 4 nœuds (à gauche) et quadrangles à 8 nœuds (à droite).

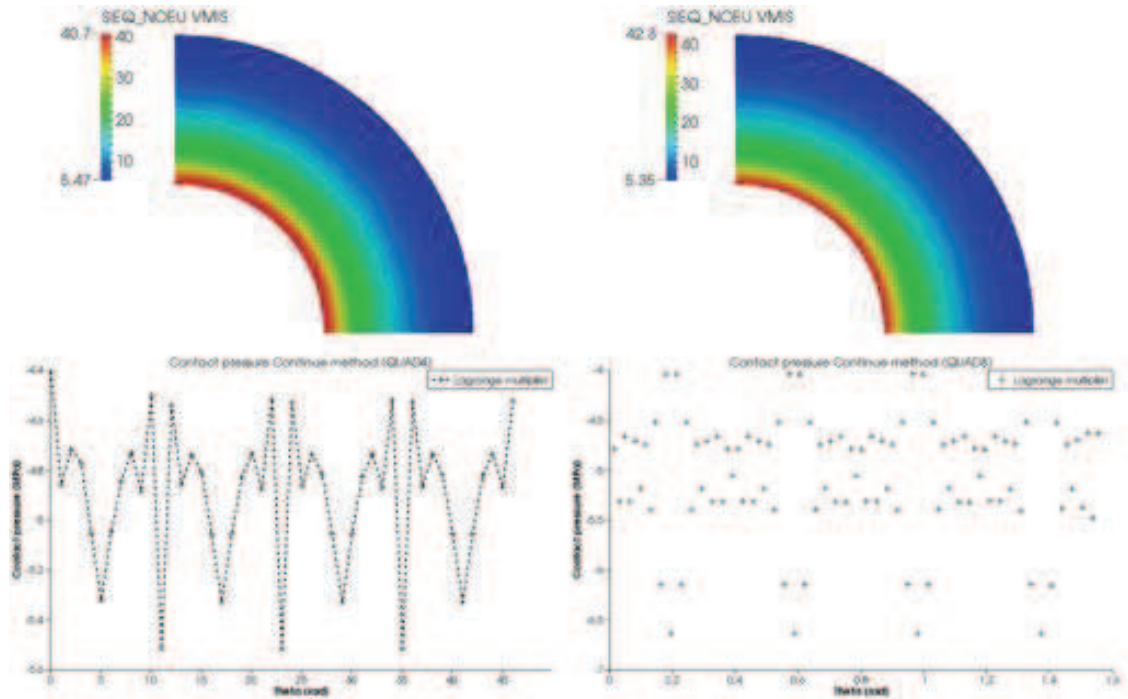


FIGURE 5.44 – Résultats pour des maillages en quadrangles linéaires et quadratiques (Méthode Continue), quadrangles à 4 nœuds (à gauche) et quadrangles à 8 nœuds (à droite).

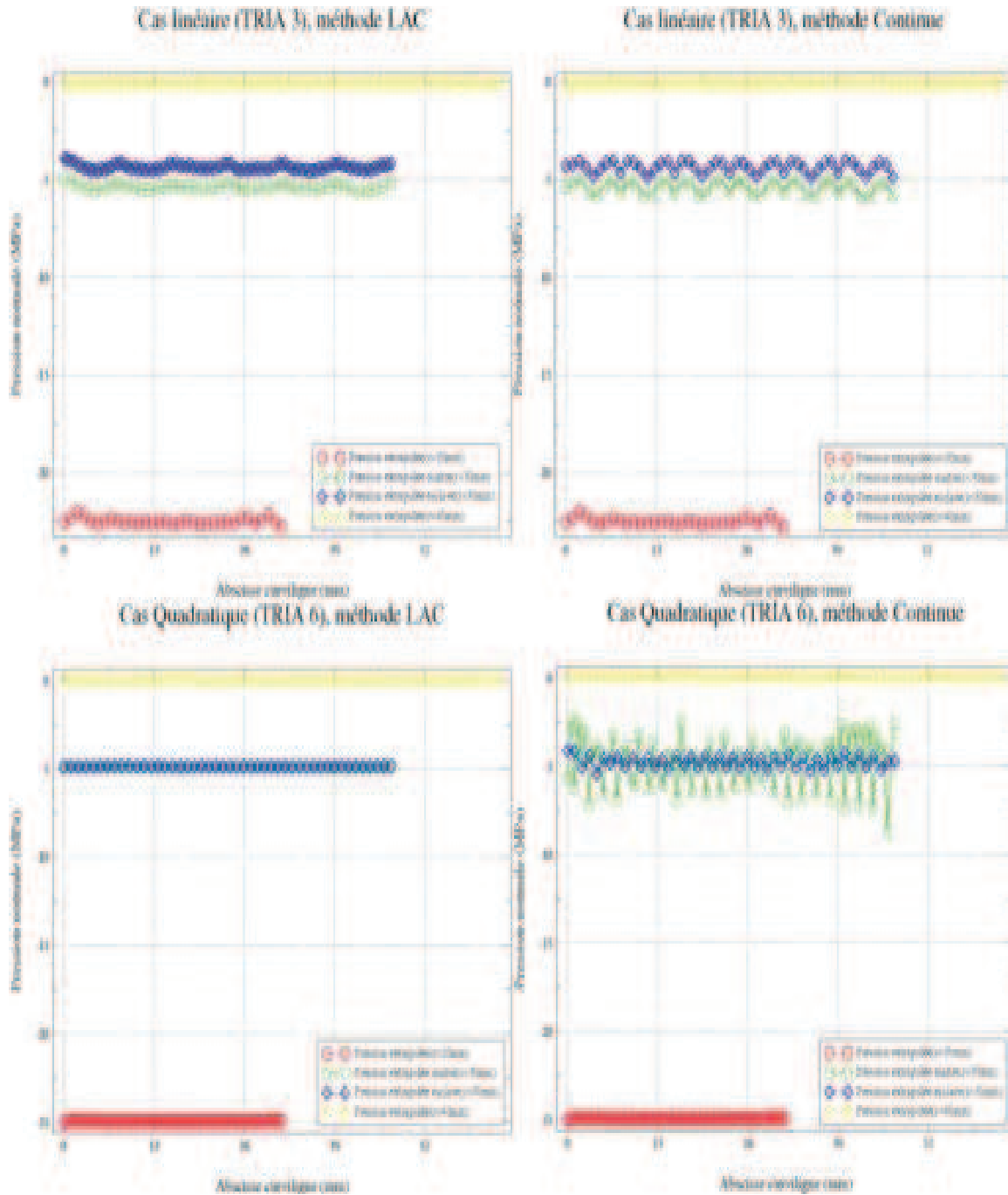


FIGURE 5.45 – Pression de contact extrapolée pour les cas maillés en triangles, carré vert côté maître, cercle rouge côté esclave et solution analytique (ligne bleue)

Dans le cas quadratique, la méthode Continue restitue de bons résultats sur les valeurs internes et externes, cependant les valeurs de pression de contact possèdent des oscillations importantes et on ne retrouve pas une parfaite continuité du champ σ_{rr} et des contraintes de Von mises à travers l'interface de contact. De ce point de vue, la méthode Continue échoue à passer ce test. On remarque de plus de très fortes oscillations pour le cas maillé en triangles à 3 nœuds. En effet, les maillages des deux calottes sont de finesses respectives très différentes et le choix de la surface esclave comme étant la surface grossière (ce qui ne

répond pas aux préconisations faites à l'utilisateur par la documentation de **Code_Aster**) amène à l'omission de contributions maîtres dans le contact. Si on inverse le choix de surface maître et esclave, on retombe sur un niveau d'oscillation comparable au cas maillé en quadrangles à 8 nœuds.

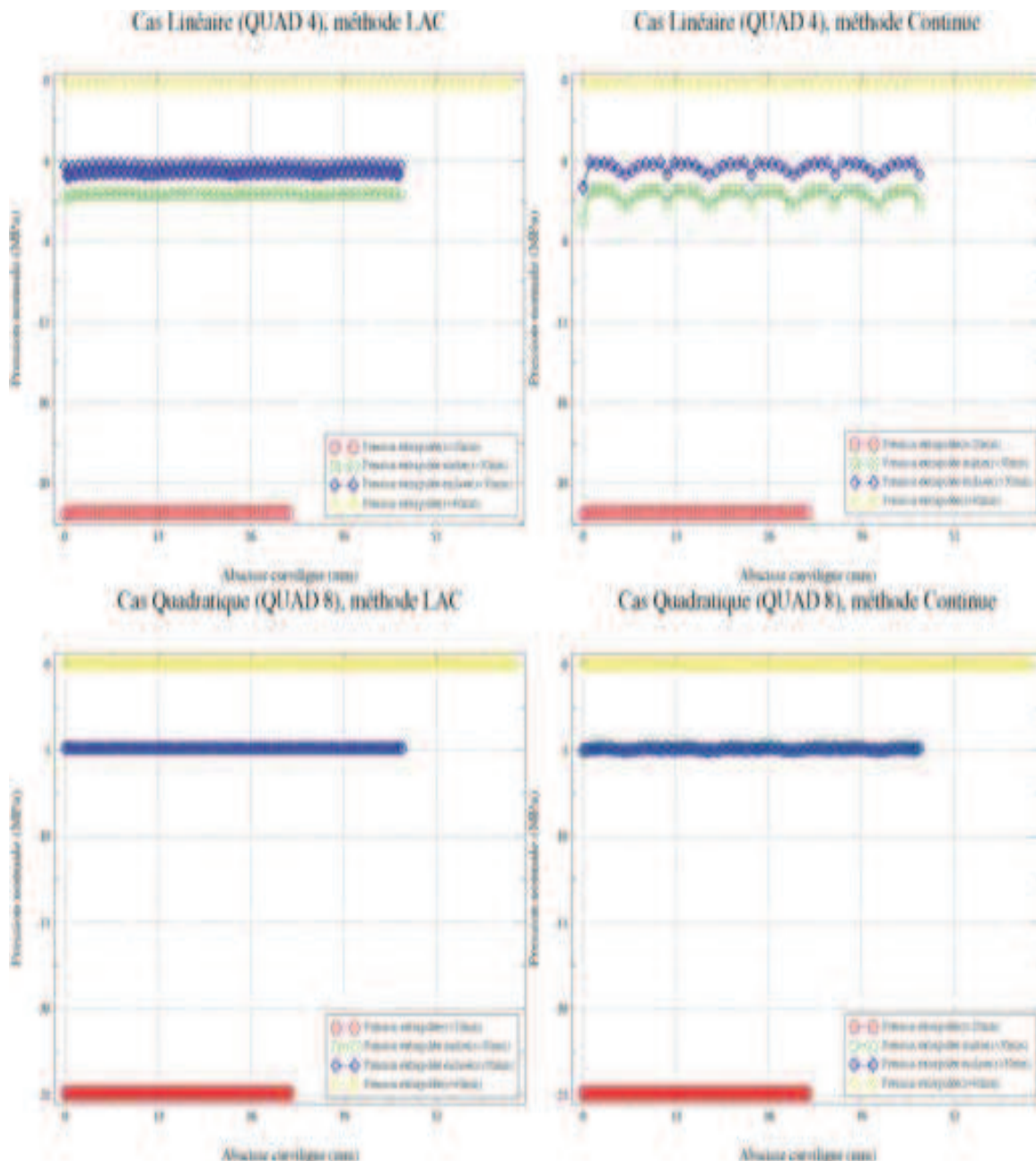


FIGURE 5.46 – Pression de contact extrapolée pour les cas maillés en quadrangles, carré vert côté maître, cercle rouge côté esclave et solution analytique

Cas 3D

Les résultats obtenus par la méthode LAC sont présentés dans les Figures 5.47, 5.49, 5.51 et 5.53; ceux obtenus par la méthode Continue sont présentés dans les Figures 5.48,

5.50, 5.52 et 5.54 (de haut en bas, première palette : déplacement radial u_r et contrainte de Cauchy radial σ_r ; deuxième palette : contrainte de Von Mises et multiplicateur de Lagrange). Les niveaux de pression interne, de contact et externe sont décrits dans les Figures 5.55 et 5.56.

Comme pour le cas 2D, les résultats obtenus sur les maillages linéaires quelle que soit la méthode utilisée sont de mauvaise qualité. On ne récupère pas la continuité des contraintes de Cauchy radiales et des contraintes de Von Mises à travers la surface de contact. De plus, on observe des oscillations très importantes sur les pressions de contact issues des multiplicateurs de Lagrange ou extrapolées, la détection du contact est même mise en échec (de manière très significative pour la méthode LAC en TETRA 4) . Dans le cas des maillages quadratiques, la géométrie est suffisamment bien approchée pour permettre à la méthode LAC d’obtenir des résultats pertinents au niveau des valeurs externes et internes u_r et σ_{rr} , de la continuité des contraintes de Cauchy radiales et des contraintes de Von Mises à travers la surface de contact, et des pressions de contact qui possèdent des oscillations autour de 1% (multiplicateur de Lagrange). Les erreurs entre les valeurs minimum et maximum des valeurs caractéristiques de pression approchées et leurs valeurs de référence sont présentés dans les Tableaux 5.17 et 5.18. Dans le cas quadratique, la méthode Continue restitue de bons résultats sur les valeurs internes et externes, cependant les valeurs de pression de contact possèdent des oscillations importantes et on ne retrouve pas une parfaite continuité du champ σ_{rr} et des contraintes de Von mises à travers l’interface de contact ; de ce point de vue la méthode Continue échoue à passer ce test.

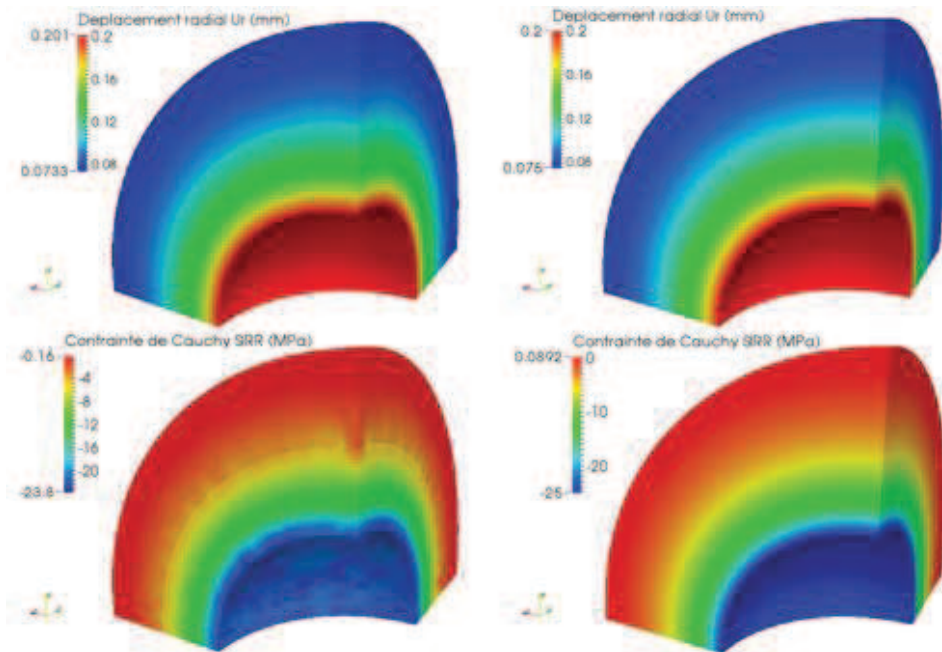


FIGURE 5.47 – Résultats pour des maillages en tétraèdres linéaires et quadratiques (Méthode LAC), tétraèdres à 4 nœuds (à gauche) et tétraèdres à 10 nœuds (à droite).

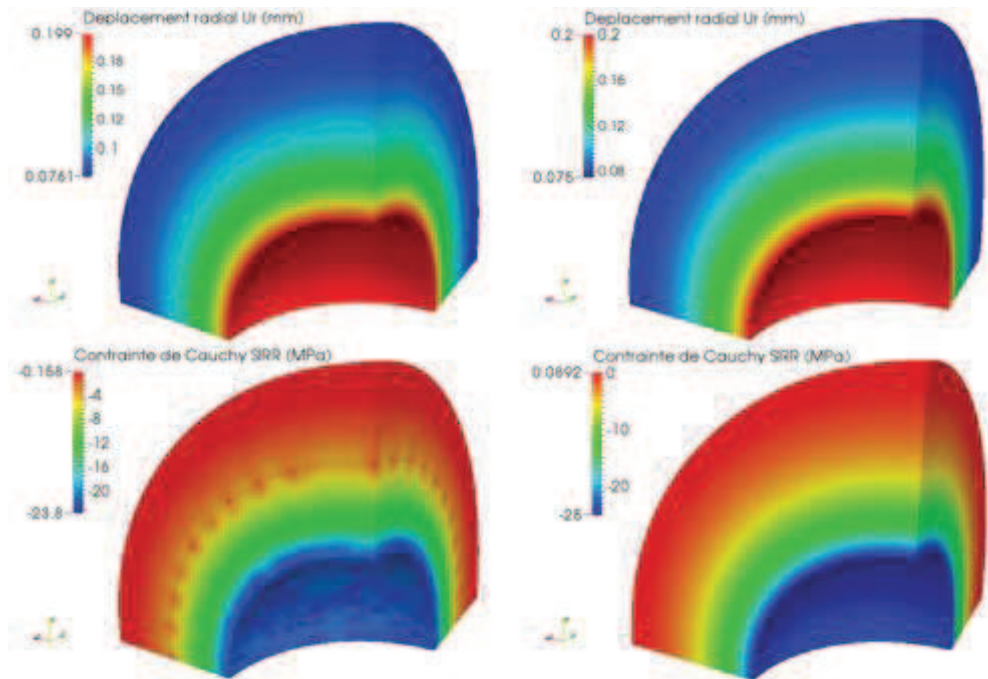


FIGURE 5.48 – Résultats pour des maillages en tétraèdres linéaires et quadratiques (Méthode Continue), tétraèdres à 4 nœuds (à gauche) et tétraèdres à 10 nœuds (à droite).

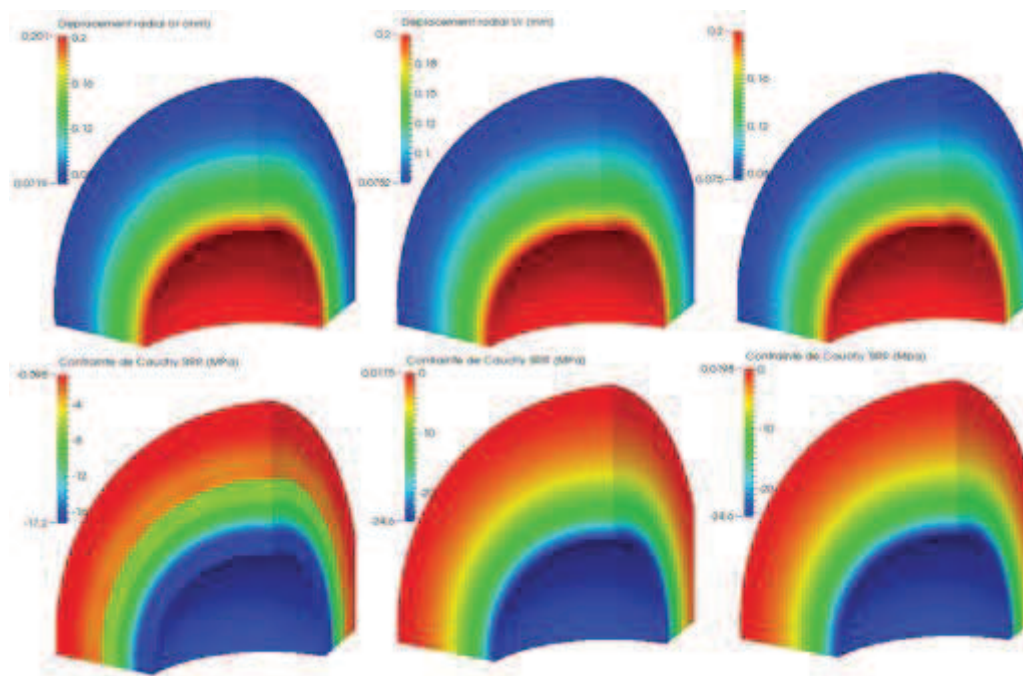


FIGURE 5.49 – Résultats pour des maillages en hexaèdres linéaires et quadratiques (Méthode LAC), hexaèdres à 8 nœuds (à gauche), hexaèdres à 20 nœuds (au milieu) et hexaèdres à 27 nœuds (à droite).

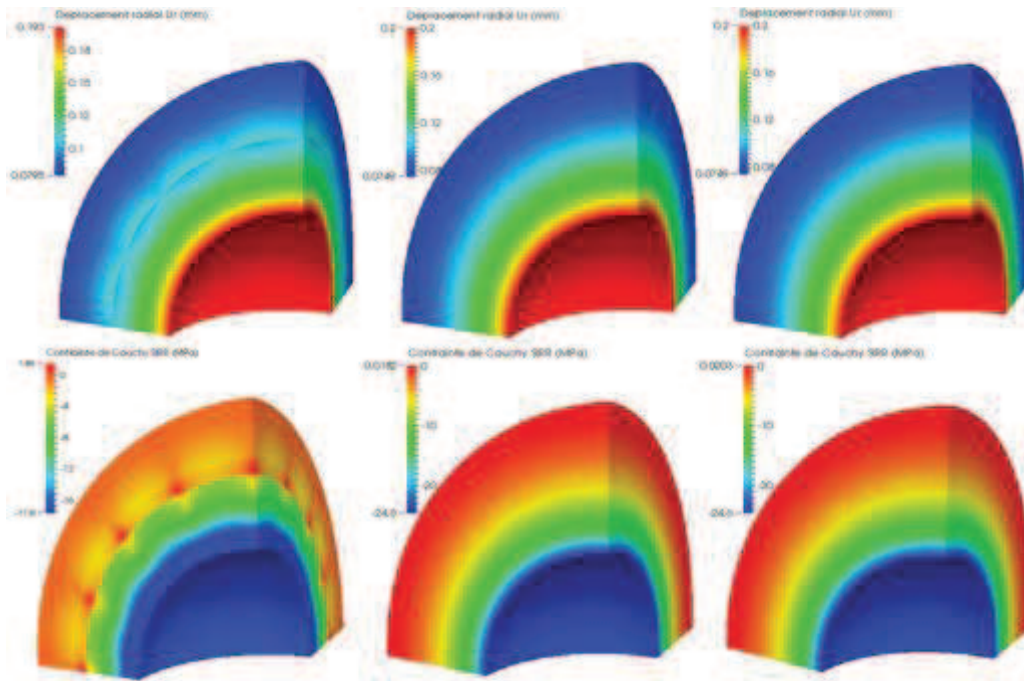


FIGURE 5.50 – Résultats pour des maillages en hexaèdres linéaires et quadratiques (Méthode Continue), hexaèdres à 8 nœuds (à gauche), hexaèdres à 20 nœuds (au milieu) et hexaèdres à 27 nœuds (à droite).

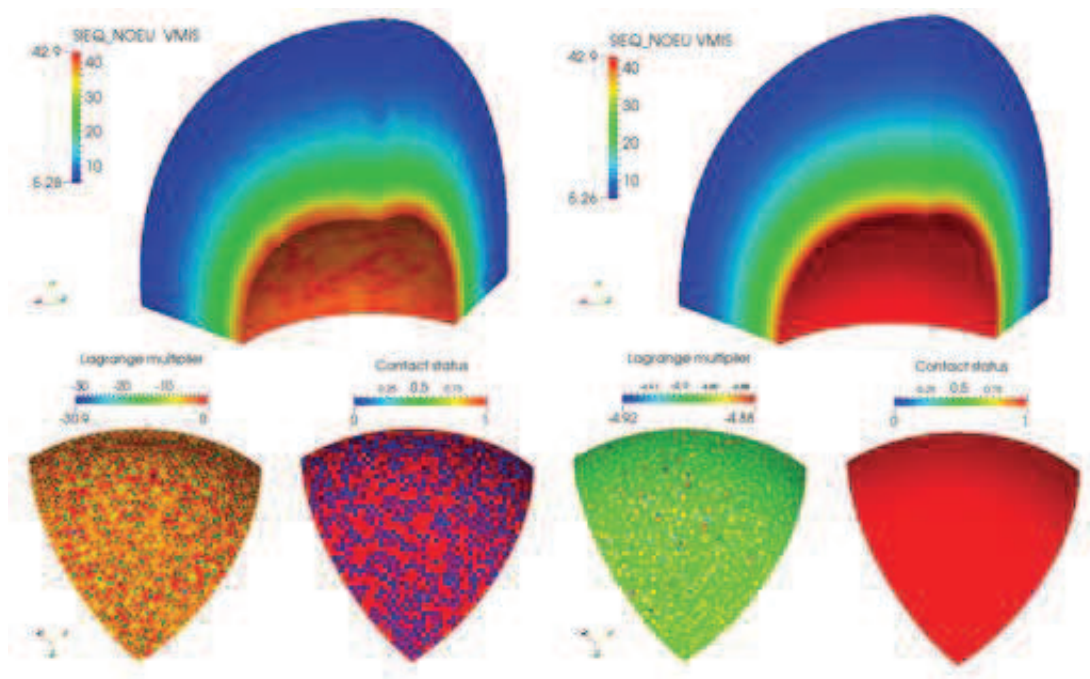


FIGURE 5.51 – Résultats pour des maillages en tétraèdres linéaires et quadratiques (Méthode LAC), tétraèdres à 4 nœuds (à gauche) et tétraèdres à 10 nœuds (à droite).

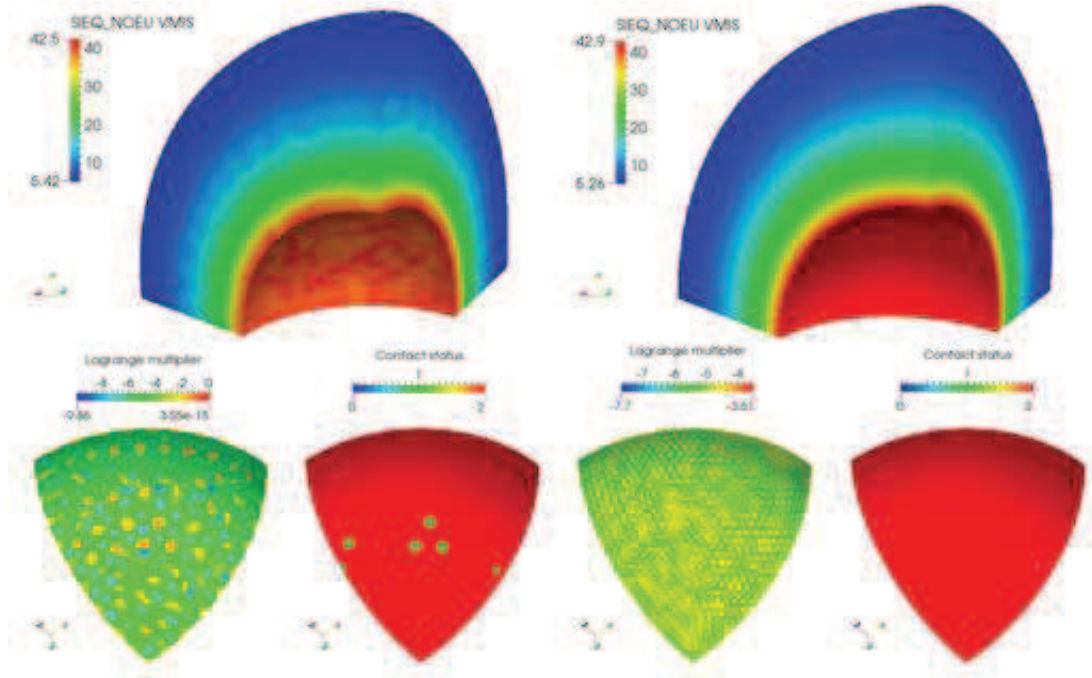


FIGURE 5.52 – Résultats pour des maillages en tétraèdres linéaires et quadratiques (Méthode Continue), tétraèdres à 4 nœuds (à gauche) et tétraèdres à 10 nœuds (à droite).

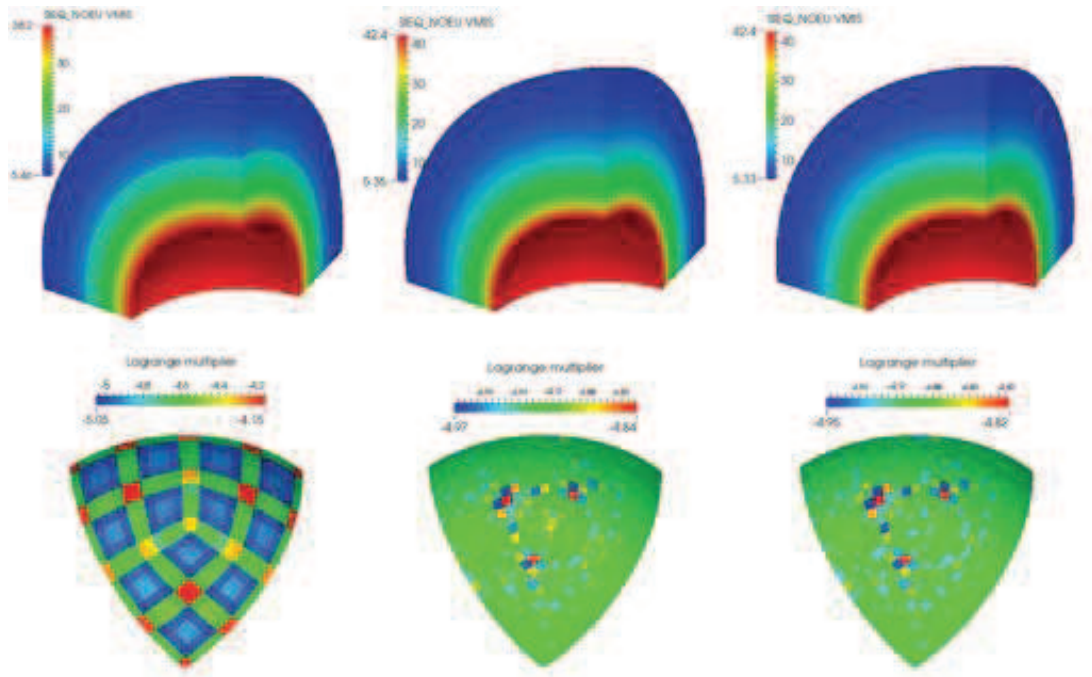


FIGURE 5.53 – Résultats pour des maillages en hexaèdres linéaires et quadratiques (Méthode LAC), hexaèdres à 8 nœuds (à gauche), hexaèdres à 20 nœuds (au milieu) et hexaèdres à 27 nœuds (à droite).

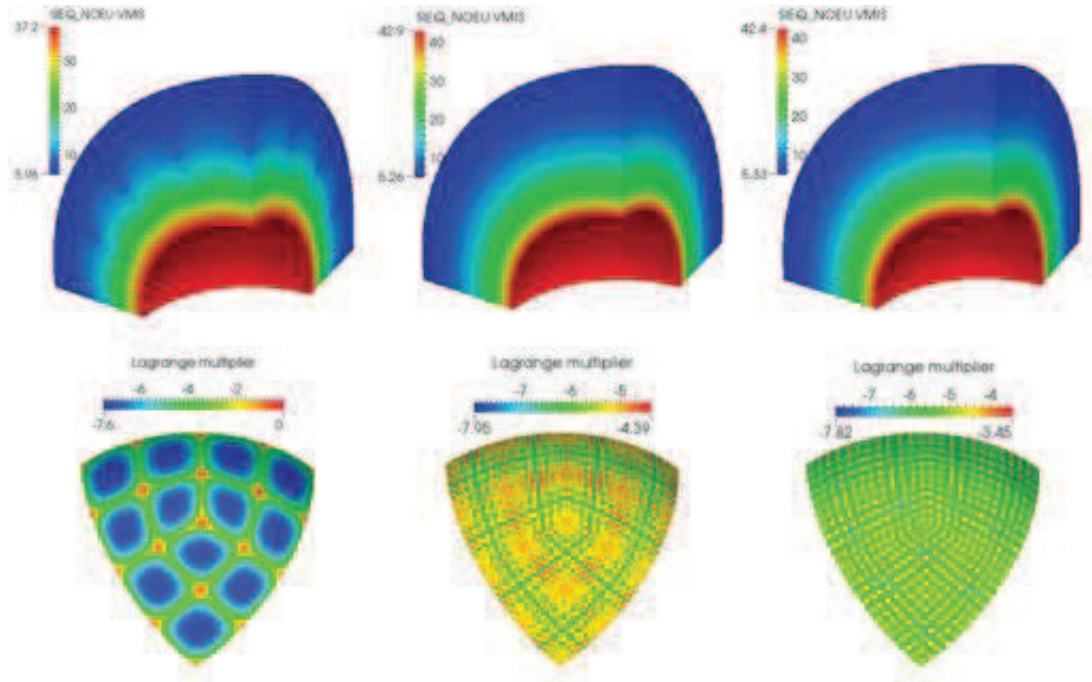


FIGURE 5.54 – Résultats pour des maillages en hexaèdres linéaires et quadratiques (Méthode Continue), hexaèdres à 8 nœuds (à gauche), hexaèdres à 20 nœuds (au milieu) et hexaèdres à 27 nœuds (à droite).

Ce test permet de confirmer l’intérêt de la méthode LAC pour la gestion de l’incompatibilité des maillages dans le cas courbe en 2D et 3D avec utilisation de maillages quadratiques. En effet, dans ce cas de figure, elle restitue des résultats conformes aux résultats analytiques et permet donc de s’affranchir facilement des limitations des approches de type “collocation” qui échouent à passer ce test. Cependant, on a aussi mis en avant une très nette limitation de la méthode dans le cas des maillages linéaires. En effet, comme intuité lors des deux tests précédents, un des pré-requis pour la méthode LAC lors du traitement d’interface de contact courbe est la bonne approximation de la géométrie de la zone de contact. Comme on peut le remarquer dans le cas des tétraèdres à 4 noeuds, si l’on n’approche pas la géométrie de manière suffisamment correcte on peut observer des aberrations sur les statuts de contact ainsi que de très fortes oscillations sur les multiplicateurs de Lagrange. On peut donc conclure que dans le cas d’interface de contact courbe, il est nécessaire d’utiliser des éléments quadratiques courbes.

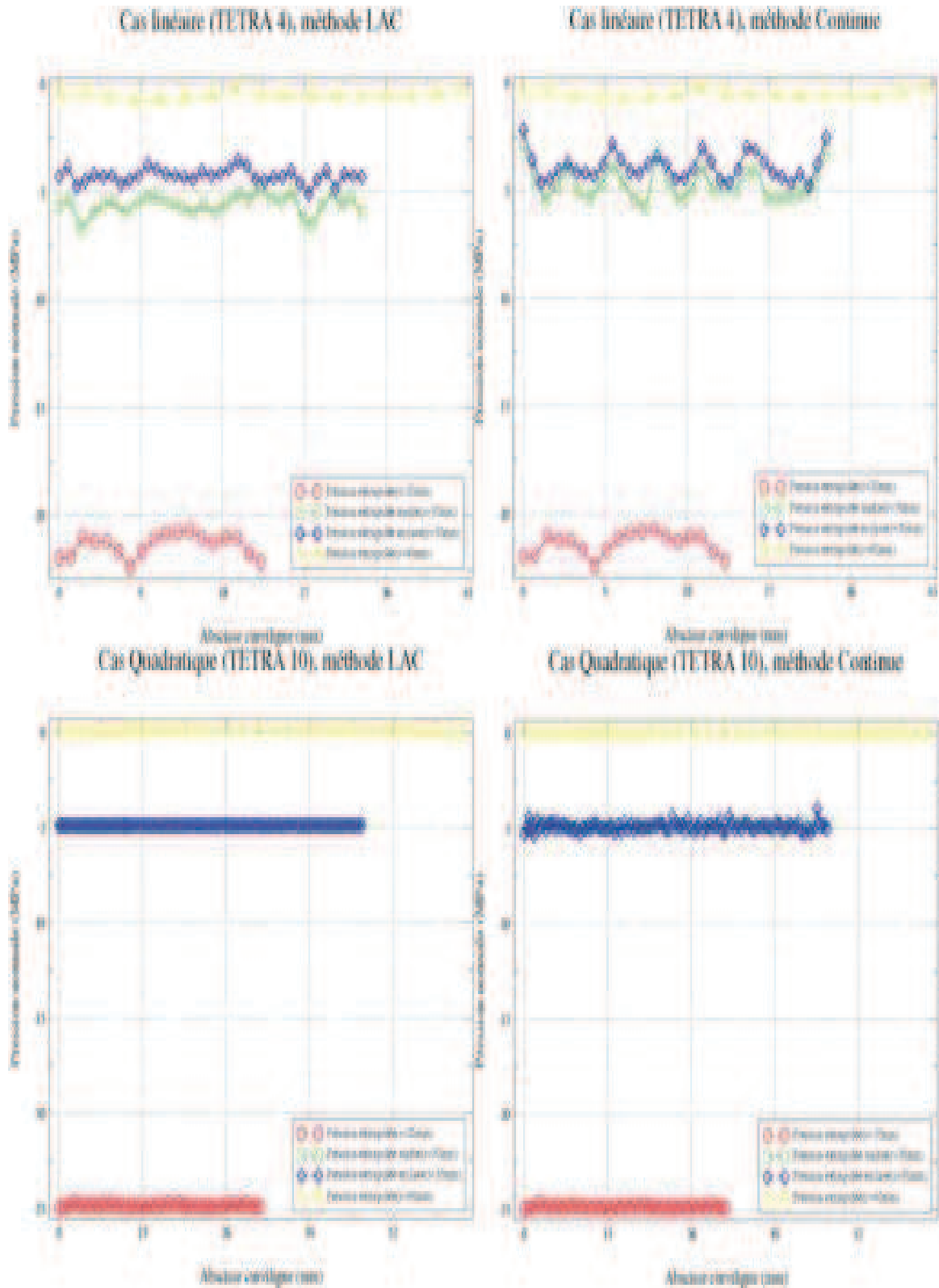


FIGURE 5.55 – Pression de contact extrapolée pour les cas maillés en tétraèdres, carré vert côté maître, cercle rouge côté esclave et solution analytique (ligne bleue).

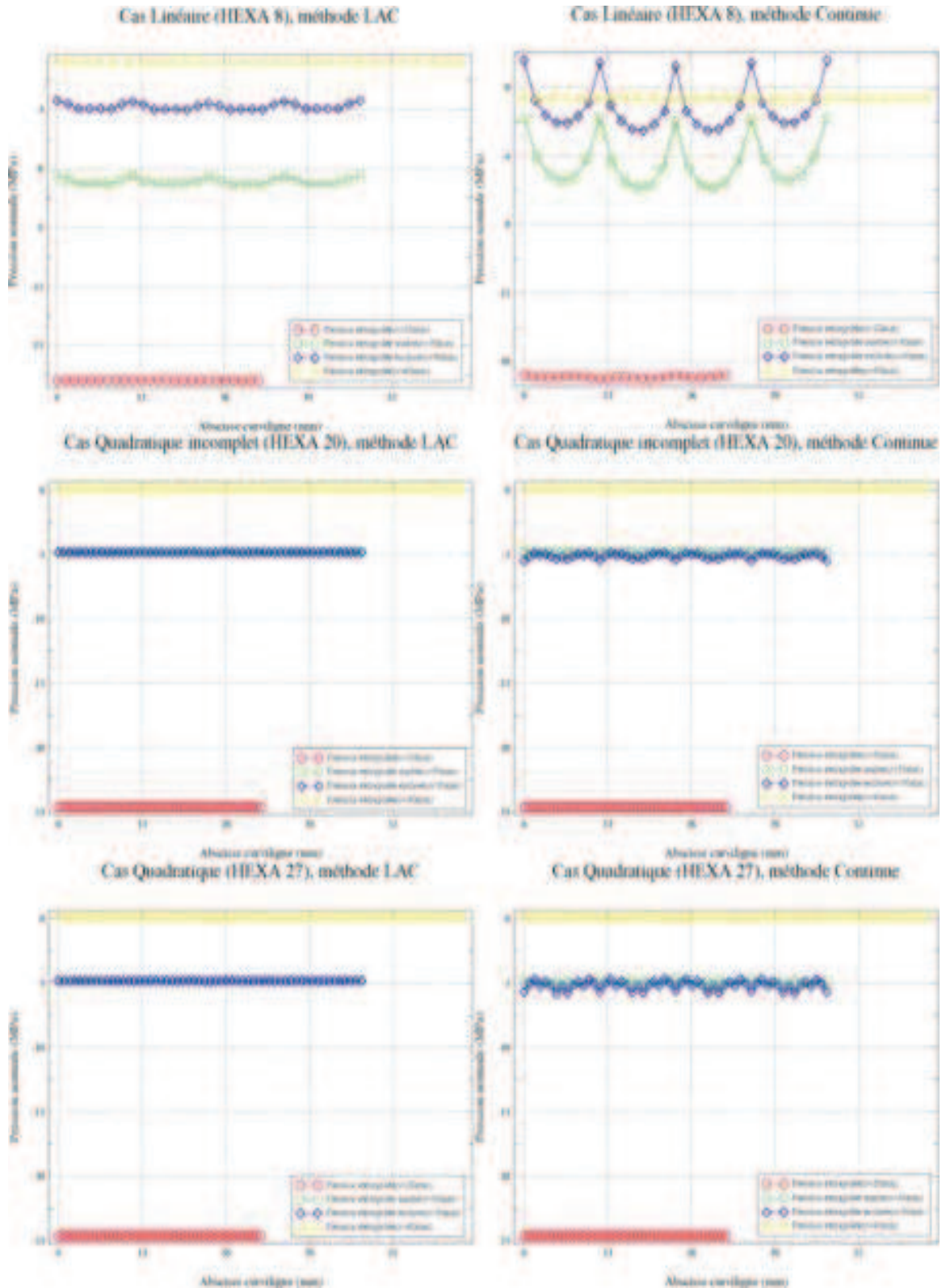


FIGURE 5.56 – Pression de contact extrapolée pour les cas maillés en hexaèdres, carré vert côté maître, cercle rouge côté esclave et solution analytique (ligne bleue).

Éléments	Erreur relative $ \lambda - \lambda^h $		Erreur relative $ \sigma_{rr} - \sigma_{rr}^h $ esclave		Erreur relative $ \sigma_{rr} - \sigma_{rr}^h $ maître		Résultat du test
	λ^h min	λ^h max	σ_{rr}^h min	σ_{rr}^h max	σ_{rr}^h min	σ_{rr}^h max	
TETRA 4	532.2%	100%	132.48%	56.9%	38.36%	73.38%	Échec
TETRA 10	0.5%	0.39%	0.72%	1.37%	0.26%	0.76%	Succès
HEXA 8	3.18%	15.14%	47.16%	12.81%	31.66%	47.9%	Échec
HEXA 20	1.61%	1.14%	3.57%	3.31%	0.38%	2.33%	Succès
HEXA 27	1.09%	1.46%	0.69%	2.4%	0.03%	2.58%	Succès

TABLE 5.17 – Erreur relative en pression de contact et sur σ_{rr} pour la méthode LAC.

Éléments	Erreur relative $ \lambda - \lambda^h $		Erreur relative $ \sigma_{rr} - \sigma_{rr}^h $ esclave		Erreur relative $ \sigma_{rr} - \sigma_{rr}^h $ maître		Résultat du test
	λ^h min	λ^h max	σ_{rr}^h min	σ_{rr}^h max	σ_{rr}^h min	σ_{rr}^h max	
TETRA 4	101.5%	100%	81.5%	60.7%	30.1%	65.8%	Échec
TETRA 10	57.3%	28.2%	9.6%	9.1%	19.3%	31.4%	Échec
HEXA 8	55.3%	100%	103.1%	62.2%	31.7%	132.4%	Échec
HEXA 20	62.4%	10.2%	5.81%	3.1%	12.7%	9.95%	Échec
HEXA 27	59.7%	29.5%	14.1%	1.95%	20.3%	19.2%	Échec

TABLE 5.18 – Erreur relative en pression de contact et sur σ_{rr} pour la méthode Continue.

5.2 Validation des taux de convergence théoriques

Cette section est consacrée à la comparaison entre les taux de convergence numérique et théorique. On évaluera ces taux de convergence pour des erreurs en norme L^2 en déplacement et en multiplicateur de Lagrange de contact. On rappelle que l'on attend un taux de convergence (en norme L^2) de 2 (resp. 2.5) en déplacement dans le cas linéaire (resp. quadratique) et de 0.5 (resp. 1) pour le multiplicateur de Lagrange de contact dans le cas linéaire (resp. quadratique). Le premier cas test est basé sur le principe des solutions manufacturées dans le cas d'un contact déformable-rigide courbe sans transition contact/non-contact, le second est basé sur le problème du contact de Hertz introduit précédemment (contact déformable-déformable avec transition contact/non-contact).

5.2.1 Cas test des solutions manufacturées

La méthode des solutions manufacturées consiste à définir l'ensemble des chargements à appliquer sur une modélisation pour obtenir une solution analytique prédéfinie (voir [17]). On va utiliser cette méthode pour tester les taux de convergence numériques en utilisant une série de raffinements d'un maillage initial donné et ceux pour tous les types d'éléments pris en compte par la méthode à l'heure actuelle. On se place dans le cadre des grands déplacements, grandes déformations et grandes rotations, ce cadre étant bien approché par le cadre algorithmique de Newton généralisé employé par la méthode LAC. On s'attend donc à bien retrouver les taux de convergence asymptotiques.

5.2.1.1 Présentation du cas test

Cas 2D

On considère un carré élastique de côté $1m$ (module de Young, $E = 1MPa$; coefficient de Poisson, $\nu = 0.0$), et une surface rigide de nature parabolôide décrite par l'équation :

$$y = -0.05 \times (x - 0.5)^2$$

La géométrie du problème est visible dans la Figure 5.57.

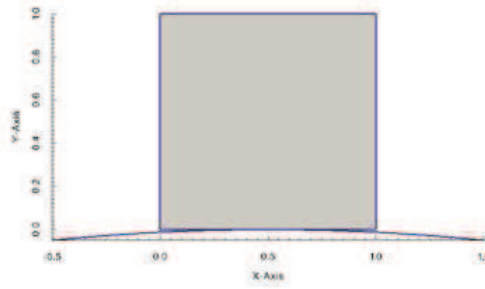


FIGURE 5.57 – Géométrie du problème en 2D.

En utilisant la méthode des solutions manufacturées, on peut définir les chargements en pression, en déplacements et surfaciques de sorte à obtenir la solution analytique en déplacement suivante :

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= -0.2 \times y^3 \times (x - 0.5), \\ u_y(x, y) &= -0.05 \times (x - 0.5)^2 \times (1 + y) - 0.01 \times y. \end{aligned}$$

La solution analytique du problème est visible dans la Figure 5.58.

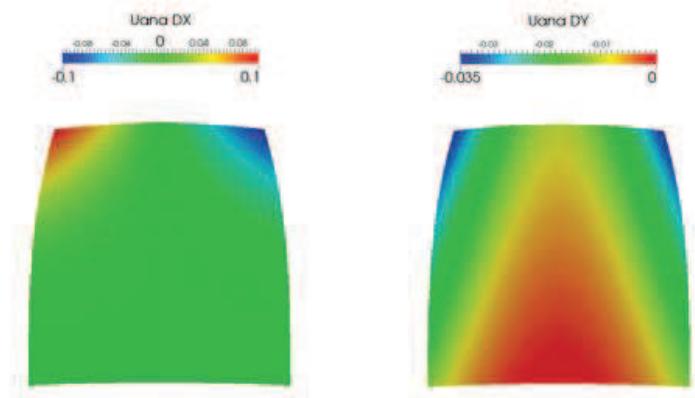


FIGURE 5.58 – Solution analytique sur la configuration déformée (échelle 1) dans le cas 2D.

Cas 3D

On considère un cube élastique de côté $1m$ (module de Young, $E = 1MPa$; coefficient de Poisson, $\nu = 0.0$), et une surface rigide de nature parabololoïde décrite par l'équation :

$$z = -0.2 \times (1 + x^2 + y^2) - 0.3$$

La géométrie du problème est visible dans la Figure 5.59.

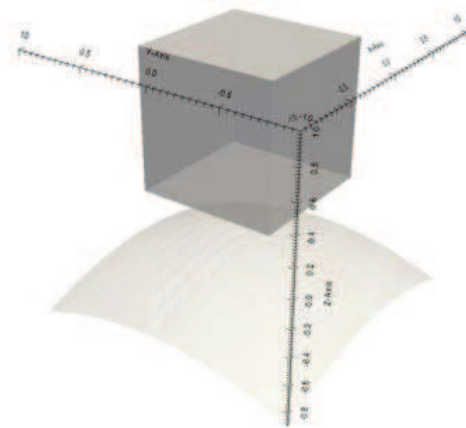


FIGURE 5.59 – Géométrie du problème en 3D.

En utilisant la méthode des solutions manufacturées, on peut définir les chargements en pression, en déplacements et volumiques de sorte à obtenir la solution analytique en

déplacement suivante :

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= 0.2 \times z^2 \times x \times y, \\ u_y(x, y, z) &= 0.2 \times z^2 \times x \times y, \\ u_z(x, y, z) &= -0.2 \times (1 + x^2 + y^2) \times (1 + 0.01 \times z) - 0.01 \times z - 0.3. \end{aligned}$$

La solution analytique du problème est visible dans la Figure 5.60.

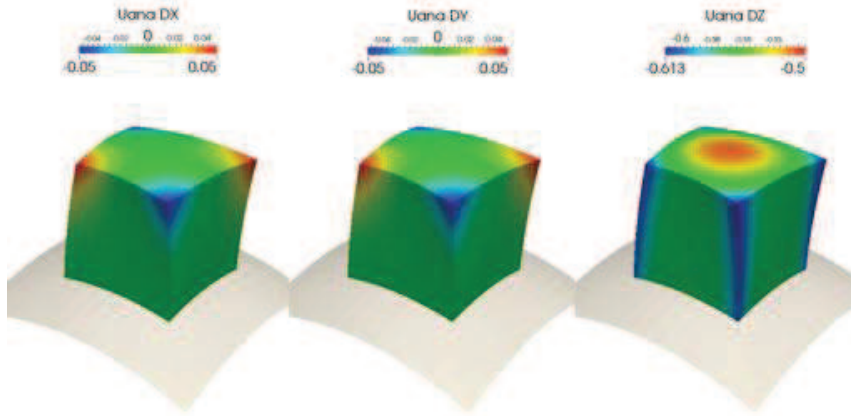


FIGURE 5.60 – Solution analytique sur la configuration déformée (échelle 1) dans le cas 3D.

5.2.1.2 Courbes de convergence

Les taux de convergence numériques sont présentés dans les Figures 5.61 et 5.62. Globalement, les taux de convergence obtenus sont en très bon accord avec la théorie. On observe la bonne hiérarchie dans les niveaux d'erreur et dans les taux de convergence pour l'erreur L^2 en déplacement. Dans le cas 2D, on remarque une sur-convergence pour les cas quadratiques (triangles à 6 nœuds et quadrangles à 8 nœuds). On remarque que pour l'erreur au niveau du multiplicateur de Lagrange, les courbes se superposent lorsque h diminue. En effet quel que soit l'espace d'approximation utilisé en déplacement, l'espace du multiplicateur reste d'ordre 0 ($P^0(T^M)$). De plus, on remarque alors que l'on obtient un taux de convergence de 1 quelque soit le cas considéré linéaire ou quadratique ce qui représente une sur-convergence pour les couples de type $P^1/P^0(T^M)$.

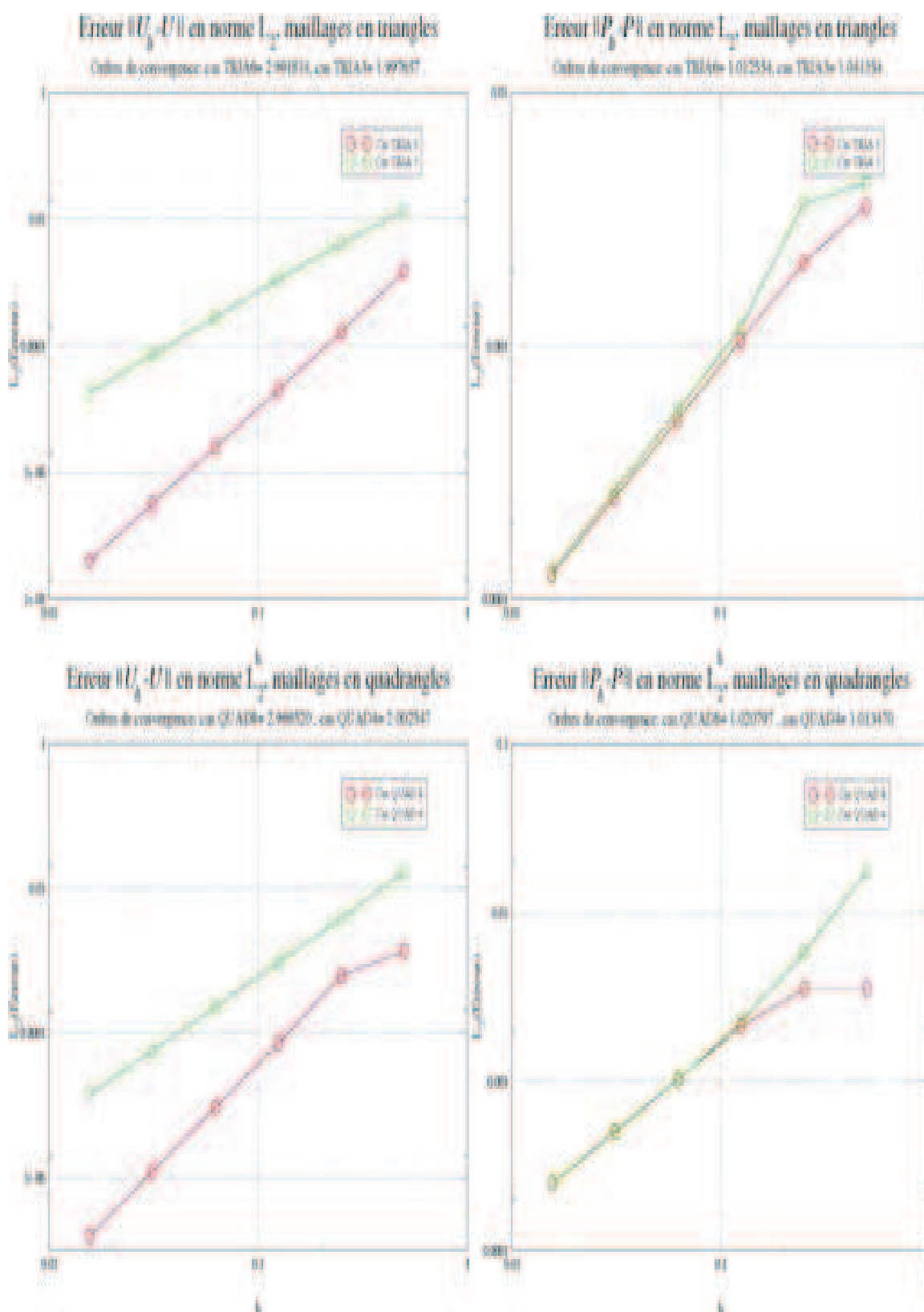


FIGURE 5.61 – Taux de convergence 2D

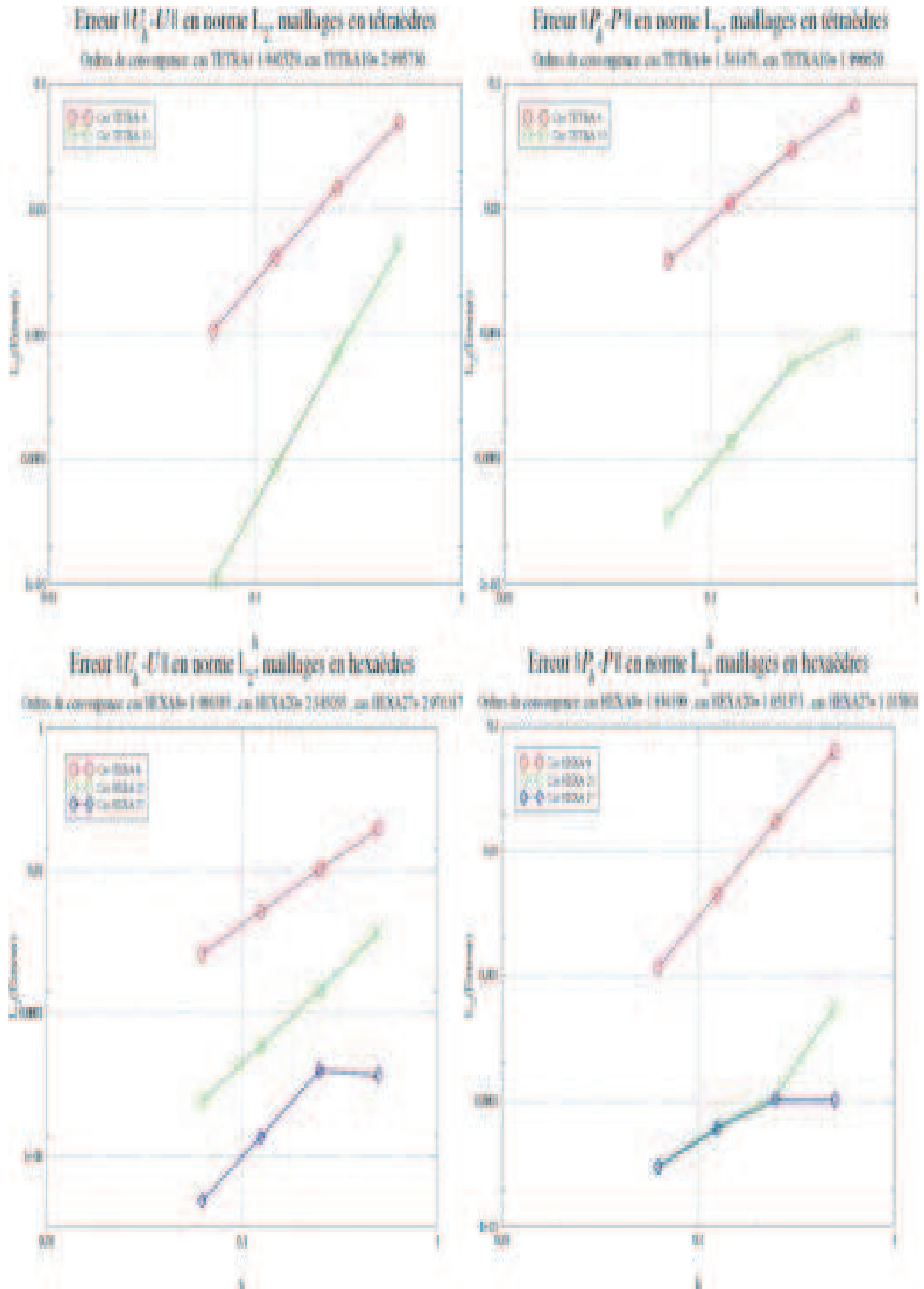


FIGURE 5.62 – Taux de convergence 3D

Dans le cas 3D, on retrouve une légère sur-convergence pour l'erreur L^2 en déplacement pour les cas maillés en hexaèdres à 27 noeuds, et en tétraèdres à 10 noeuds. Pour l'erreur L^2 en pression de contact (multiplicateur de Lagrange), on remarque une sur-convergence dans les cas linéaires, cependant les niveaux d'erreur sont encore assez élevés, et dans le cas maillé en tétraèdres à 10 noeuds. Dans tous les cas, on ne remarque pas de sous convergence. Les taux de convergence numériques concordent donc bien avec les taux de convergence théoriques. La sur-convergence pour l'erreur sur les multiplicateurs de Lagrange pour les cas linéaires pourrait être expliquée par une récente analyse théorique, voir [72].

5.2.2 Cas test de Hertz avec solution de référence

5.2.2.1 Présentation du cas test

Pour finaliser la validation des taux de convergence, on va réutiliser les cas tests du problème de contact de Hertz introduit dans la section précédente. Ces cas tests permettent de prendre en compte le cas du contact déformable-déformable (et donc des maillages incompatibles) ainsi que la transition contact/non-contact dans une zone de contact potentielle lors de l'étude numérique des taux de convergence de la méthode LAC. On ne connaît pas de solution analytique en déplacement pour cette configuration de test, on va donc utiliser une solution de référence du problème calculée sur un maillage suffisamment fin pour être représentatif. Étant donné que l'on ne respecte pas totalement les hypothèses HPP (voir Remarque 5.4) on va aussi utiliser cette solution de référence pour calculer l'erreur au niveau des Lagrangiens de contact (à la place de la solution analytique connue). Cette procédure nous permet d'éviter un effet de palier pour la convergence de l'erreur au niveau des multiplicateurs de Lagrange.

5.2.2.2 Courbes de convergence

Les taux de convergence numériques sont présentés dans les Tableaux 5.19 et 5.20. Bien que la configuration du test soit compliquée, notamment vis à vis de la zone de contact de taille restreinte et de la géométrie courbe, on obtient des résultats en très bon accord avec la théorie. On observe une légère sur-convergence pour l'erreur en pression de contact pour les cas linéaire 2D et 3D et une légère sous-convergence pour les éléments quadrangulaires à 8 noeuds et hexaédriques à 20 et 27 noeuds.

Éléments	$\ u - u^h\ _{0,\Omega^1,\Omega^2}$		$\ \lambda - \lambda^h\ _{0,\Gamma_C}$	
	Théorique	Numérique	Théorique	Numérique
TRIA 3	2.0	2.33	0.5	0.71
TRIA 6	2.5	3.11	1.0	0.91
QUAD 4	2.0	2.04	0.5	0.76
QUAD8	2.5	2.24	1.0	0.83

TABLE 5.19 – Taux de convergence 2D

Éléments	$\ u - u^h\ _{0,\Omega^1,\Omega^2}$		$\ \lambda - \lambda^h\ _{0,\Gamma_C}$	
	Théorique	Numérique	Théorique	Numérique
TETRA 4	2.0	1.97	0.5	0.83
TETRA 10	2.5	2.42	1.0	0.97
HEXA 8	2.0	2.24	0.5	0.83
HEXA 20	2.5	2.36	1.0	0.95
HEXA 27	2.5	2.30	1.0	0.99

TABLE 5.20 – Taux de convergence 3D

5.3 Conclusion

Sous réserve de bien décrire la géométrie de l’interface de contact, la méthode LAC permet de s’affranchir des limitations engendrées par l’approche de type “collocation” dans le cas général des maillages incompatibles et cela pour tous les éléments approchant correctement la géométrie de contact considérée en 2D et 3D. On retrouve le comportement d’une méthode de type “mortar”. On passe le patch test de Taylor avec succès et on améliore la précision et la qualité des résultats en pression de contact. De plus, on arrive à valider les taux de convergence théoriques dans le cas général des maillages incompatibles. On observe toutefois une limitation à ces bons résultats, on a pu mettre en évidence qu’il est nécessaire de décrire la géométrie de l’interface de contact le plus fidèlement possible (maillages quadratiques courbes sur les bords ou linéaires avec un degré de finesse très élevé) afin de récupérer toutes les caractéristiques d’une méthode de type “mortar”. Comme expliqué précédemment, le fait que la condition de contact soit exprimée en moyenne sur chaque macro-élément permet une implémentation assez facile dans un code de calcul basé sur des calculs élémentaires locaux. Cette méthode semble donc être efficace tout en étant facilement implémentable dans le formalisme du code de calcul par éléments finis industriel **Code_Aster**. Il serait intéressant d’observer son comportement vis à vis de tests plus complexes couplant différents problèmes tels que le multi-contact, les grands déplacements, grandes rotations et déformations, et les comportements non-linéaires.

Chapitre 6

Évaluation numérique : vers les cas test industriels

Dans ce chapitre, on va soumettre la nouvelle méthode proposée à une batterie de tests plus sévères et plus représentatifs des études industrielles. On sortira donc du cadre des hypothèses HPP, on abordera le multi-contact, les grands déplacements, les grandes déformations et rotations. Pour ce faire on va utiliser au maximum la base de cas tests de **Code_Aster**. On traitera les tests suivants :

- Multi-Contact en 2D et 3D
- Ironing en 2D et 3D
- Ecrasement d'un demi-anneau élastique en 2D et 3D

Pour conclure ce chapitre, on analysera l'apport de la méthode sur une étude de type industrielle. On évaluera la qualité des résultats obtenus avec la méthode LAC, notamment les pressions de contact et leur répartition, sur le modèle numérique représentant une ailette et son attache d'un rotor BP100.

6.1 Multi-Contact

Dans ce test, on considère le contact entre 4 objets, avec 3 zones de contact. Ce test est issu de la base de cas tests de validation de **Code_Aster**. De plus, ce test a fait l'objet d'études avec d'autres codes de calcul par éléments finis : ABAQUS, SYSTUS et SAMCEF. On dispose donc d'une série de valeurs de référence qui nous permettront de valider les résultats obtenus avec la méthode LAC.

6.1.1 Présentation du cas test

6.1.1.1 Configuration 2D

On considère deux cylindres de rayon $10mm$, $20mm$ respectivement et de hauteur $2mm$, $4mm$ respectivement et deux sphères de rayons $5mm$, $10mm$ respectivement. Tous les objets sont élastiques et composés du même matériau (module de Young $E = 2 \cdot 10^5 MPa$, coefficient de Poisson $\nu = 0.3$). Dans cette première configuration on utilise une modélisation axisymétrique du problème, voir Figure 6.1. On encastre le côté du cylindre inférieur

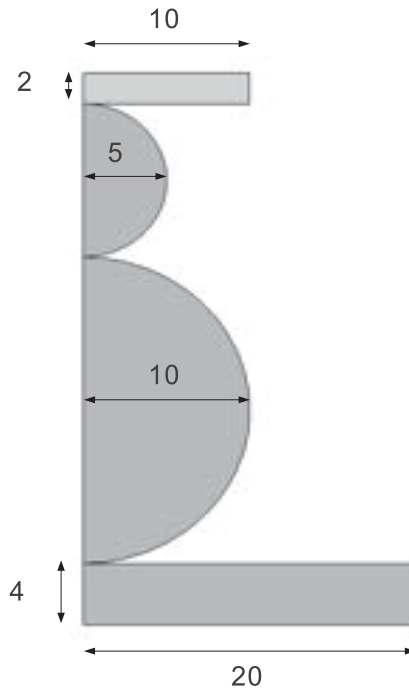


FIGURE 6.1 – Configuration du cas test en 2D.

et l'on impose un déplacement vertical de $2mm$ sur la face supérieure du cylindre supérieur. On s'intéresse à deux variables quantitatives et une qualitative. On considère d'une part le déplacement vertical (selon y) le long de la base du cylindre inférieur, et la valeur de la réaction normale au niveau de l'encastrement voir Tableaux 6.1 et 6.2, d'autre part la distribution des pressions de contact qui doivent être de même forme que celles observées pour le problème du contact de Hertz.

6.1.1.2 Configuration 3D

On considère la modélisation 3D du problème précédent. En utilisant les différentes symétries, on ne modélise qu'un quart de la géométrie, voir Figure 6.2. On utilisera les mêmes

ABAQUS	$-0.83mm$	Valeur moyenne $-0.8175mm$
SYSTUS	$-0.82mm$	
SAMCEF	$-0.78mm$	
<i>Code_Aster</i>	$-0.84mm$	

TABLE 6.1 – Déplacement vertical du centre du cylindre inférieur.

ABAQUS	110270N	
SYSTUS	109500N	Valeur moyenne 108256.75N
SAMCEF	105000N	
Code_Aster	108257N	

TABLE 6.2 – Réaction verticale à l'encastrement.

valeurs de référence.

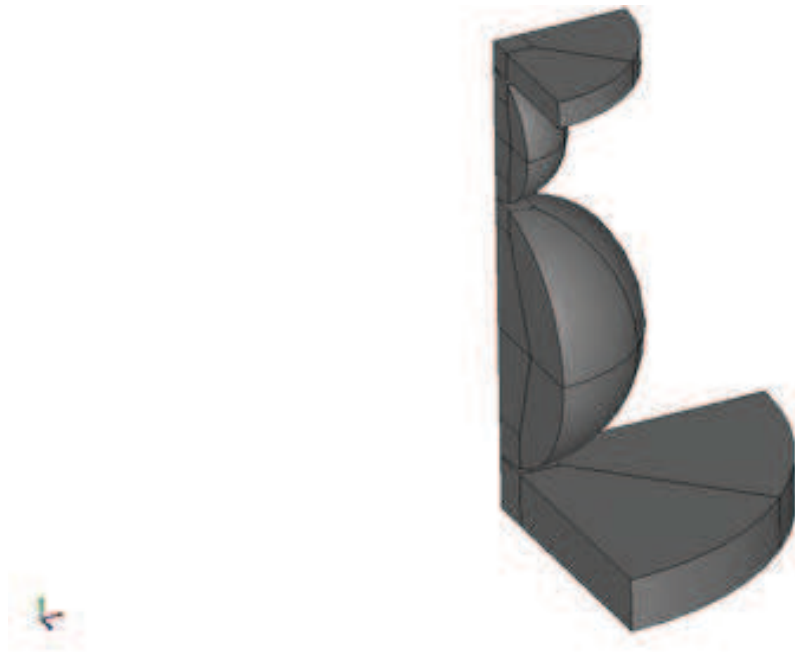


FIGURE 6.2 – Configuration du cas test en 3D.

6.1.2 Analyse des résultats

6.1.2.1 Cas 2D axisymétrique

On considère un maillage totalement mixte, on utilise des éléments linéaires pour mailler les deux cylindres (triangles à 3 nœuds et des quadrangles à 4 nœuds) ; les sphères sont quant à elles maillées avec des éléments quadratiques (triangles à 6 nœuds et des quadrangles à 8 nœuds). Cette configuration mélangeant les approches de discrétisation complexifie de manière importante le test en augmentant la non-conformité des maillages au niveau de l'interface de contact.

Les résultats sont présentés dans les Figures 6.3, 6.4 et dans le Tableau 6.3. L'ordre de grandeur des résultats est bien respecté, on obtient un écart par rapport aux valeurs moyennes de référence de 2.02% en déplacement et de 2.85% pour la réaction normale à l'encastrement, ce qui est plus faible que la dispersion des valeurs de référence par rapport à la moyenne (4%). De plus on remarque que la distribution des pressions de contact est correcte. Conformément à ce qui a été observé dans le chapitre précédent, on note que la distribution de pression est de meilleure qualité pour la zone de contact discrétisée avec

des éléments quadratiques du côté maître et esclave (zone du milieu). En effet, du fait des grandes déformations, toutes les zones de contact deviennent courbes, les éléments linéaires sont alors moins précis.

	Valeurs calculées	Ecart relatif à la référence
Déplacement du centre de la base du cylindre inférieur	$-0.834mm$	2.02%
Réaction normale à l'encastrement	111343N	2.85%

TABLE 6.3 – Valeurs d'intérêt calculées et écart relatif par rapport à la référence.

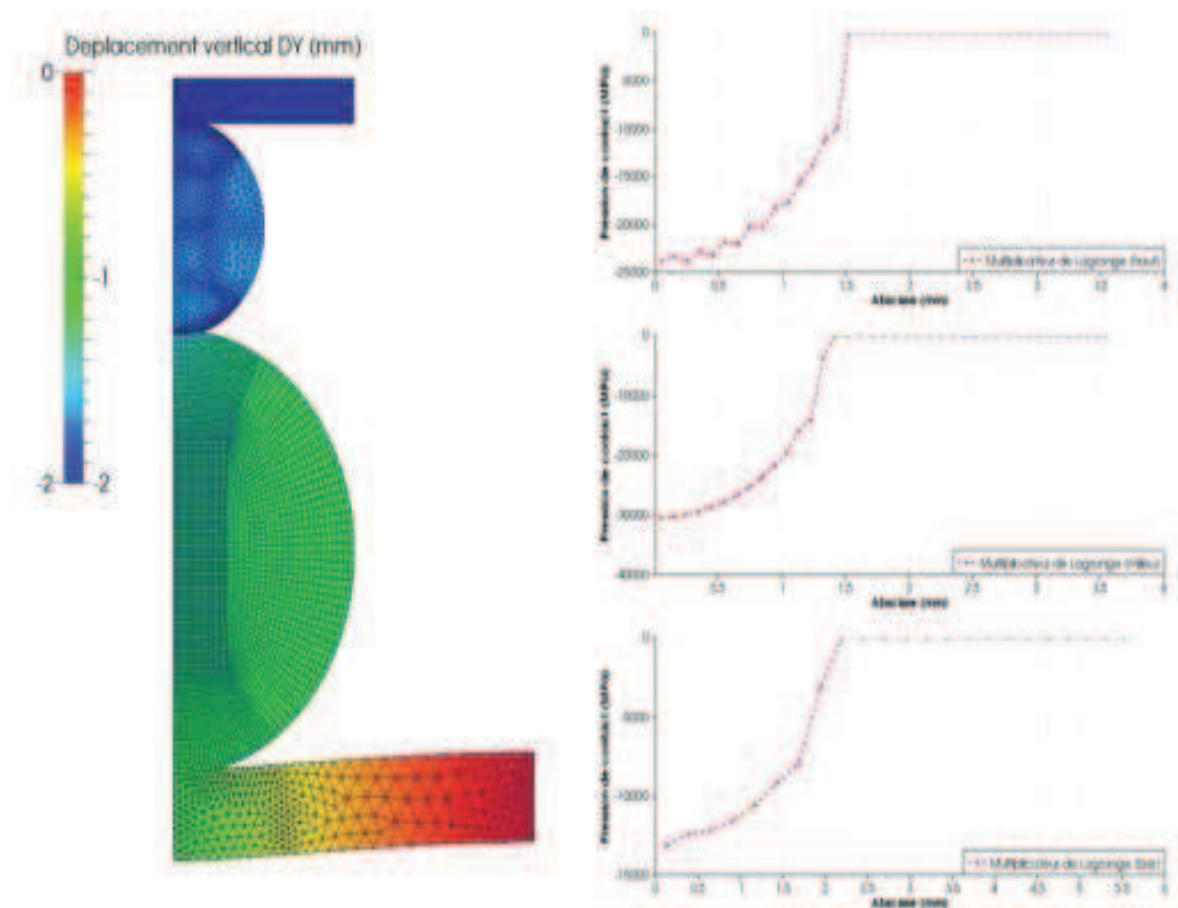


FIGURE 6.3 – Résultats obtenus par la méthode LAC, déplacement vertical imprimé sur la déformée à gauche, pression de contact sur les différentes zones à droite.

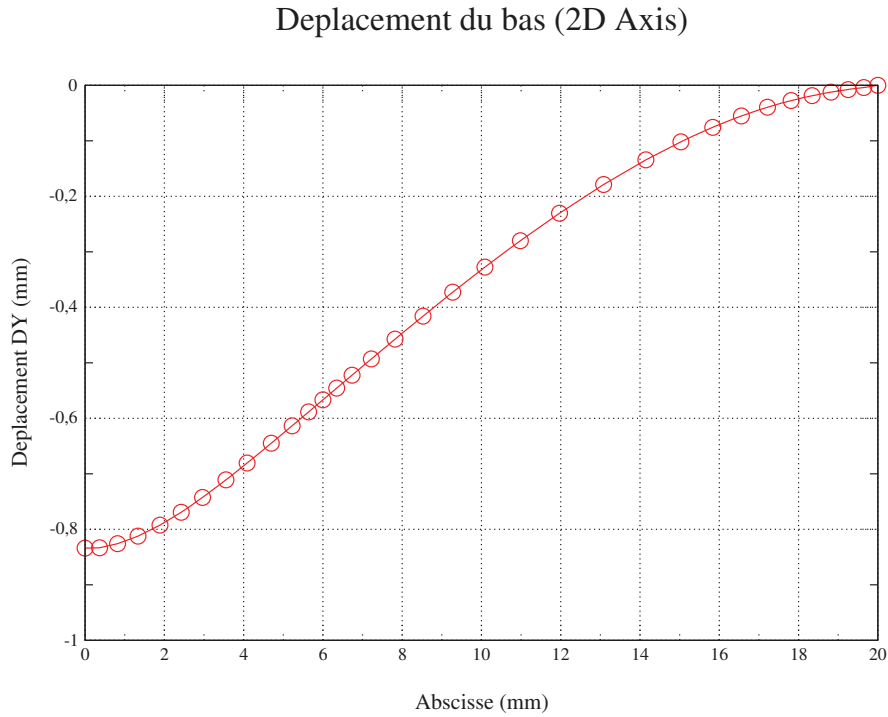


FIGURE 6.4 – Déplacement vertical le long de la base du cylindre inférieur.

6.1.2.2 Cas 3D

Comme dans le cas 2D, on considère un maillage totalement mixte. On utilise des éléments linéaires pour les deux cylindres (tétraèdres à 4 nœuds et hexaèdres à 8 nœuds) et des éléments quadratiques pour les deux sphères (tétraèdres à 10 nœuds et hexaèdres à 20 nœuds). Les résultats dans le cas 3D sont présentés dans les Figures 6.5 et 6.6 et dans le Tableau 6.4. L'ordre de grandeur des résultats est bien respecté. Cependant, on observe un écart plus important au niveau de la réaction normale à l'encastrement, on obtient un écart relatif de 7% par rapport à la moyenne de référence. Comme dans le cas 2D, la distribution des pressions de contact est bien cohérente avec la distribution attendue, on note une qualité des pressions de contact légèrement amoindrie dans le cas de la zone de contact maillée en tétraèdres à 4 nœuds. Cette baisse de qualité est conforme à ce que l'on a observé lors de tests précédents.

	Valeurs calculées	Ecart relatif à la référence
Déplacement du centre de la base du cylindre inférieur	$-0.82mm$	0.3%
Réaction normale à l'encastrement	116370N	7.49%

TABLE 6.4 – Valeurs d'intérêt calculées et écart relatif par rapport à la référence.

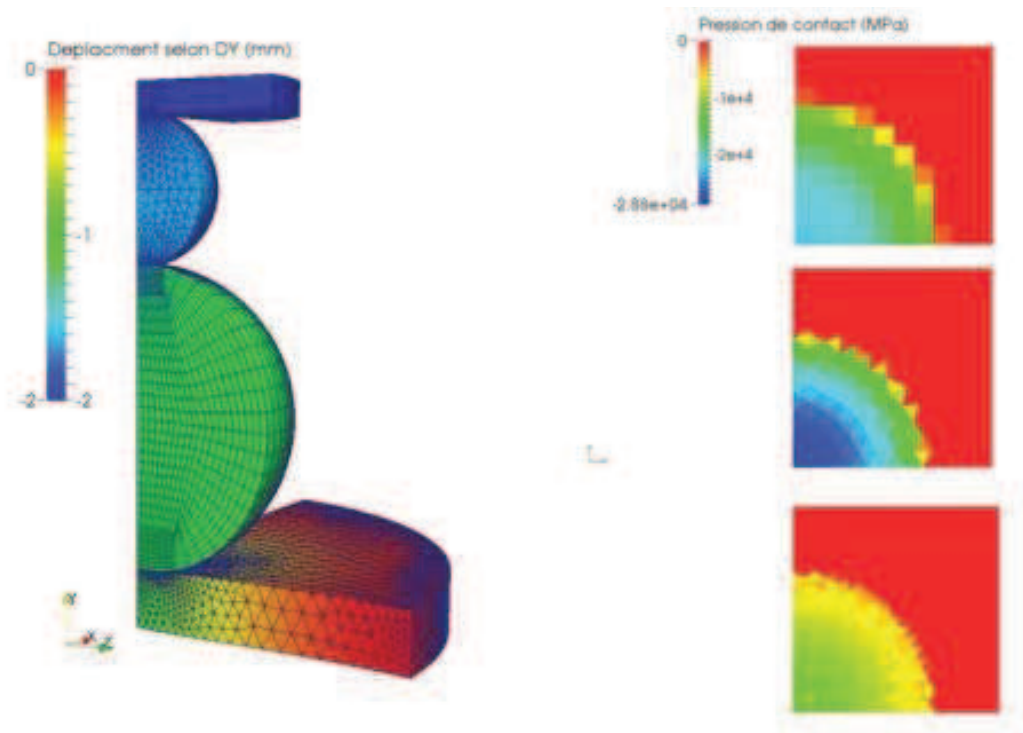


FIGURE 6.5 – Résultats obtenus par la méthode LAC, déplacement vertical imprimé sur la déformée à gauche, pression de contact des différentes zones à droite.

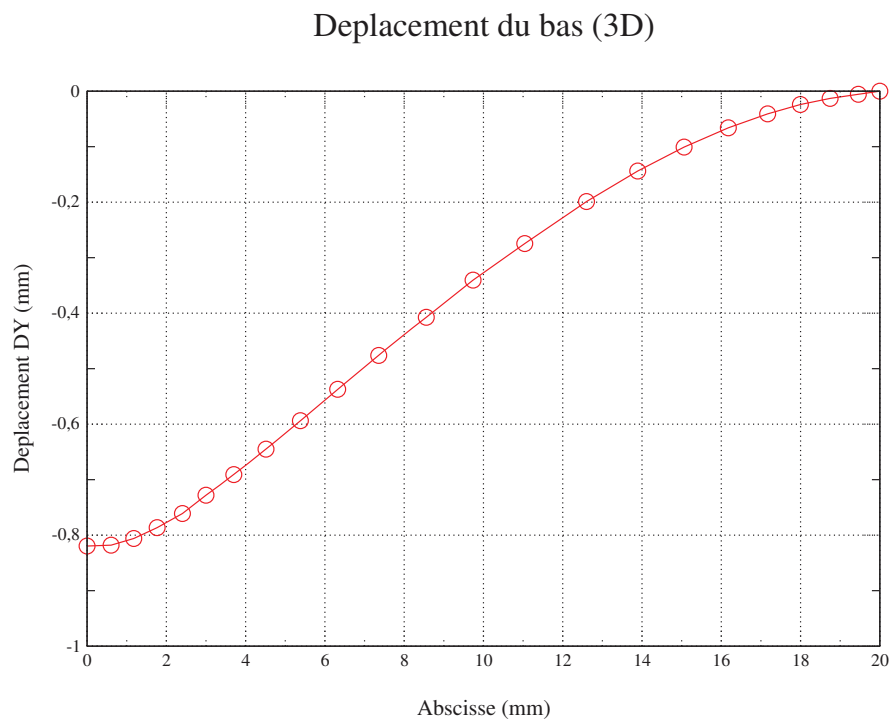


FIGURE 6.6 – Déplacement vertical le long de la base du cylindre inférieur.

6.1.3 Conclusion

Ce test nous permet de réaliser une première validation de l'approche LAC dans le cas du contact multicorps déformables. De plus, le mélange des types d'éléments nous permet de confirmer la robustesse de la méthode vis-à-vis des non-linéarités géométriques issues du contact entre différentes approximations géométriques d'une surface non plane en contact. De manière globale, les résultats sont très satisfaisants étant donnée la provenance hétérogène des différentes valeurs de référence.

6.2 Ironing

Dans ce cas test, on va considérer la configuration du “shallow ironing”. Cela consiste à faire glisser avec ou sans frottement (sans dans notre cas) un poinçon “rigide” sur un bloc “mou”. On observe donc des grands niveaux de déformation et des grands déplacements, ce qui nous amène naturellement à traiter de multiples configurations de maillages incompatibles. Ce cas test fait partie des cas tests courants dans la littérature traitant les problèmes de contact en grands déplacements et grandes déformations, voir [84, 33, 37, 65]. On disposera donc d'ordres de grandeurs de référence provenant de différentes publications pour valider les résultats issus de la nouvelle méthode proposée.

6.2.1 Présentation du cas test

6.2.1.1 Configuration 2D

On considère un poinçon incurvé (issu d'un disque tronqué de rayon $0.75mm$) élastique linéaire de module de Young $E = 68.96 \cdot 10^8 MPa$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0.32$ et une base rectangulaire ($12mm$ sur $4mm$) élastique linéaire de module de Young $E = 6.896 \cdot 10^8 MPa$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0.32$, voir Figure 6.7. On utilise une modélisation de type contrainte plane. La base est encastree en bas et l'on applique le chargement suivant au poinçon :

- $t \in [0, 1]$, $u_x = 0, u_y =$,
- $t \in [1, 2]$, $u_x = 10(t - 1), u_y = 1$.

On considère le problème en quasi-statique, par souci de simplicité on assimilera la succession des pas de chargement à des pas de temps. On considère le problème sans frottement, on s'intéresse donc principalement à deux variables d'intérêt : la réaction verticale sur la face supérieure du poinçon, et la distribution des pressions de contact (qualitative et quantitative). Les résultats obtenus par les différentes équipes de recherche sont présentés dans la Figure 6.8 et dans le Tableau 6.5. On remarque notamment la disparité des résultats obtenus par les différentes équipes, jusqu'à 9.20% d'écart avec la valeur moyenne des solutions de référence.



FIGURE 6.7 – Configuration du cas test en 2D

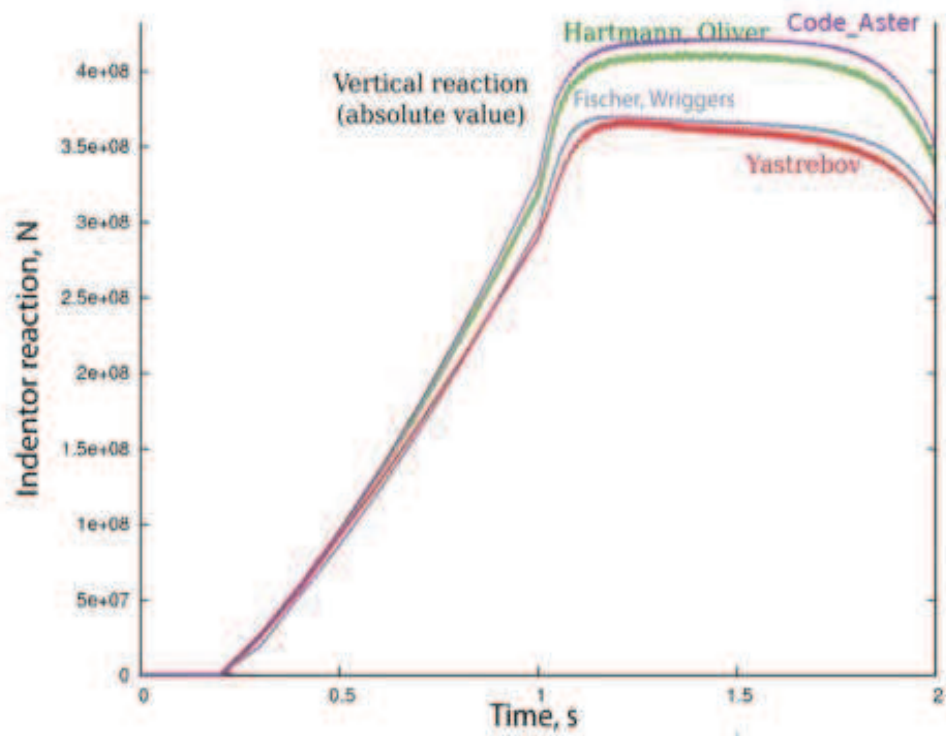


FIGURE 6.8 – Résultats obtenus par différentes équipes de recherche

Hartmann, Oliver	$4.15 \cdot 10^8 N$	
Fischer, Wriggers	$3.7 \cdot 10^8 N$	Valeur moyenne $3.9375 \cdot 10^8 N$
Yastrebov	$3.6 \cdot 10^8 N$	
<i>Code_Aster</i>	$4.3 \cdot 10^8 N$	

TABLE 6.5 – Réaction verticale maximale au niveau poinçon obtenue par différentes équipes de recherche

6.2.1.2 Configuration 3D

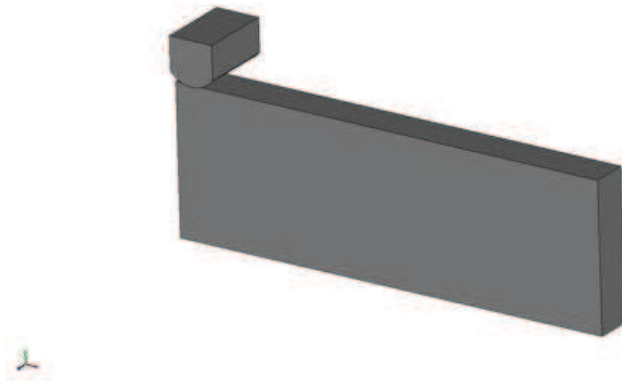


FIGURE 6.9 – Configuration du cas test en 3D

On considère l'extension au cas 3D, par extrusion, du cas 2D précédent, voir Figure 6.9.

6.2.2 Analyse des résultats

6.2.2.1 Cas 2D

On considère deux maillages de calcul, les caractéristiques des maillages sont présentées dans le Tableau 6.6

Maillages	Nœuds	Éléments
TRIA 3	3972	7940
TRIA 6	15138	7722

TABLE 6.6 – Maillages 2D considérés.

Les résultats sont présentés dans les Figures 6.12, 6.10 (cas linéaire), et 6.13 6.11 (cas quadratique). Bien que ce cas test soit considéré comme très compliqué dans la littérature, la méthode LAC donne des résultats très concordants avec les résultats obtenus par les autres codes de calcul par éléments finis. Les courbes de réaction normale obtenues au niveau du poinçon en fonction du pas de chargement sont en bon accord qualitatif et quantitatif avec la moyenne des résultats des autres équipes de recherche. La réaction

normale maximum au niveau du poinçon est égale à $4.17 \cdot 10^8 N$ pour le cas linéaire et $4.18 \cdot 10^8 N$ pour le cas quadratique, soit un écart relatif de 5.9% et 6.16% avec la moyenne des résultats de référence considérés. De plus, on obtient une distribution des pressions de contact de bonne qualité, sans oscillations apparentes dans le cas quadratique (on peut observer quelques petites oscillations à certains pas de temps au niveau des zones de transition contact/non-contact pour le cas linéaire).

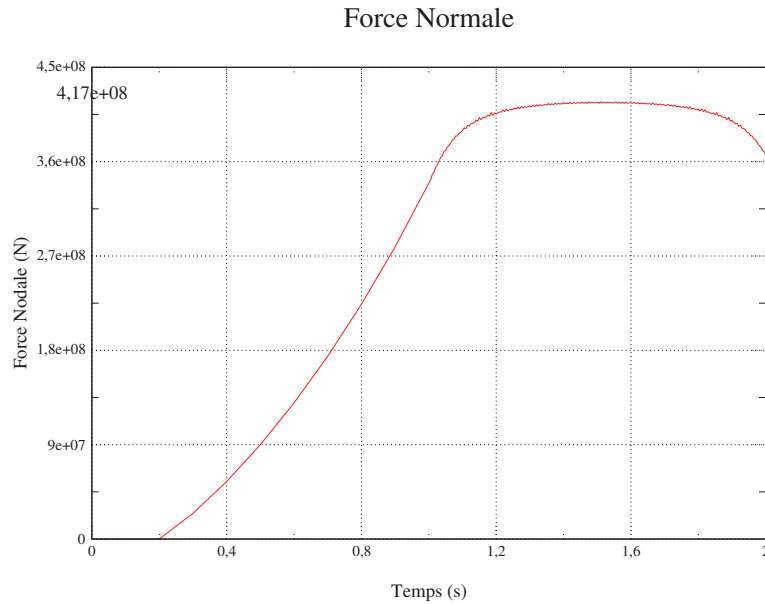


FIGURE 6.10 – Réaction normale au niveau du poinçon, cas linéaire.

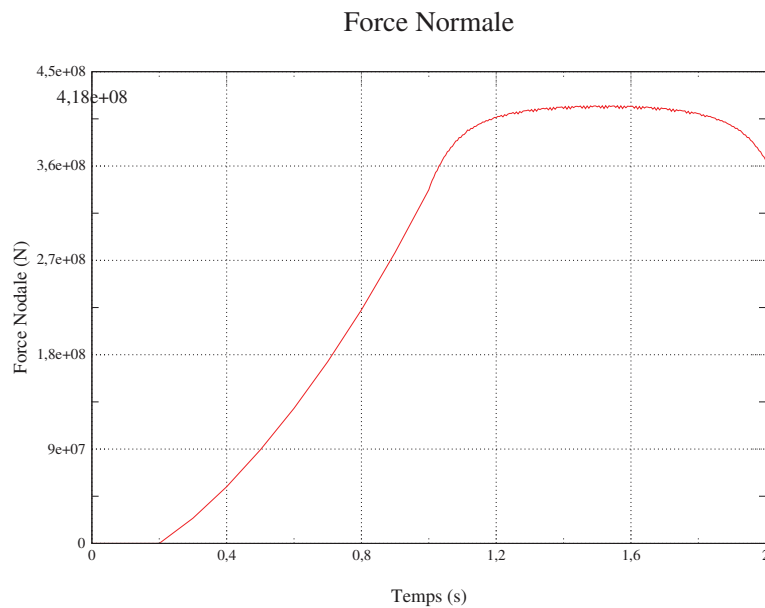


FIGURE 6.11 – Réaction normale au niveau du poinçon, cas quadratique.

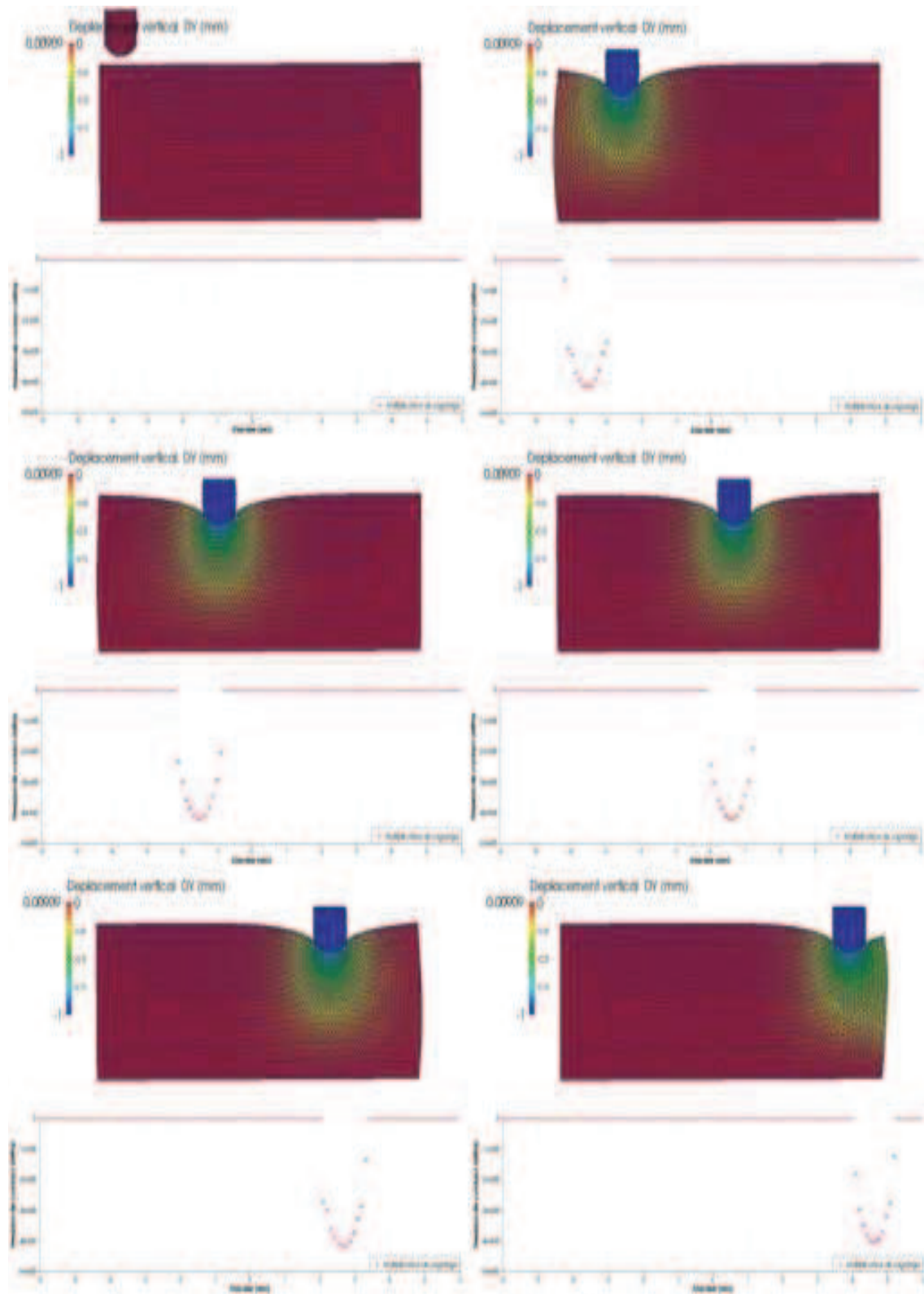


FIGURE 6.12 – Cas linéaire : déplacement vertical sur la configuration déformée et pression de contact pour différents temps “de chargement”, $t = 0s$, $t = 1.17s$, $t = 1.39s$, $t = 1.61s$, $t = 1.8s$ et $t = 2s$.

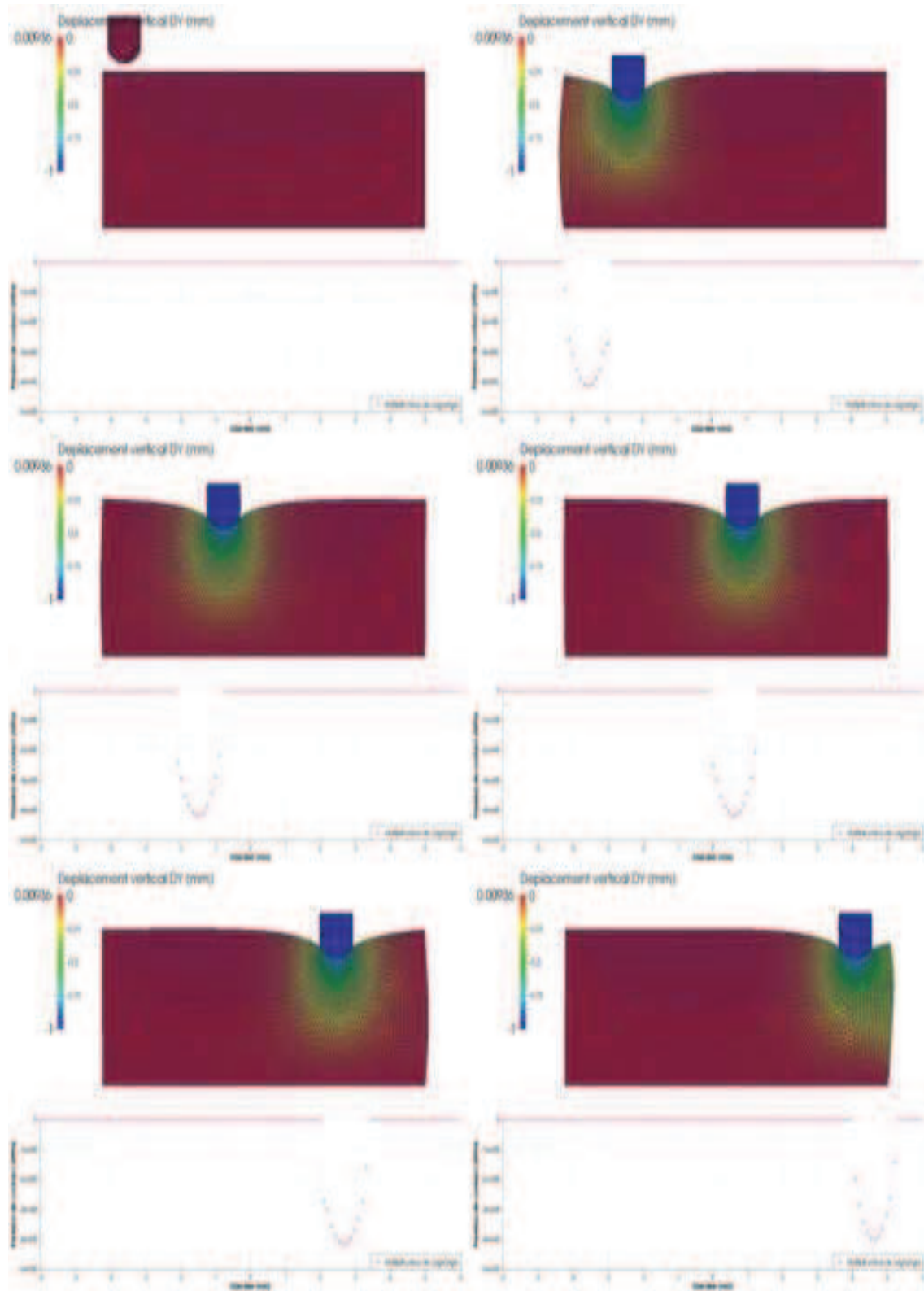


FIGURE 6.13 – Cas quadratique : déplacement vertical sur la configuration déformée et pression de contact pour différents temps “de chargement”, $t = 0s$, $t = 1.17s$, $t = 1.39s$, $t = 1.61s$, $t = 1.8s$ et $t = 2s$.

6.2.2.2 Cas 3D

On considère deux maillages de calcul, les caractéristiques des maillages sont présentés dans le Tableau 6.7.

Maillages	Nœuds	Éléments
TETRA 4	7664	30144
TETRA 10	14464	8283

TABLE 6.7 – Maillages 3D considérés.

Les résultats sont présentés dans les Figures 6.15, 6.16, déplacement vertical sur la configuration déformée et pression de contact sur l'axe \vec{Ox} en fonction de x . Les Figures 6.14, 6.17 décrivent la réaction normale au poinçon en fonction de t . Dans le cas linéaire, les résultats sont globalement en bon accord avec les résultats de référence du cas 2D. La courbe de réaction normale au poinçon en fonction de t est similaire qualitativement et quantitativement à celle du cas 2D. On obtient un maximum de réaction normale de $4.09 \cdot 10^8 N$ soit un écart avec la moyenne des valeurs de référence de 3.87%. Au niveau des pressions de contact, on obtient des valeurs de pression en bon accord avec le cas 2D. Cependant, comme on l'a déjà remarqué dans les cas tests précédents, on observe de légères oscillations au niveau des zones de transition contact/non-contact où la courbure est maximale. Dans le cas quadratique, on a subi un échec de convergence lorsque l'on considère l'enfoncement du poinçon à $1mm$. En limitant l'enfoncement à $0.7mm$, l'algorithme de résolution converge. Les résultats obtenus sont alors de très bonne qualité. Ce problème de convergence met en lumière un défaut potentiel de l'approche numérique lorsque l'on considère des modélisations faisant intervenir des grandes déformations avec des maillages quadratiques.

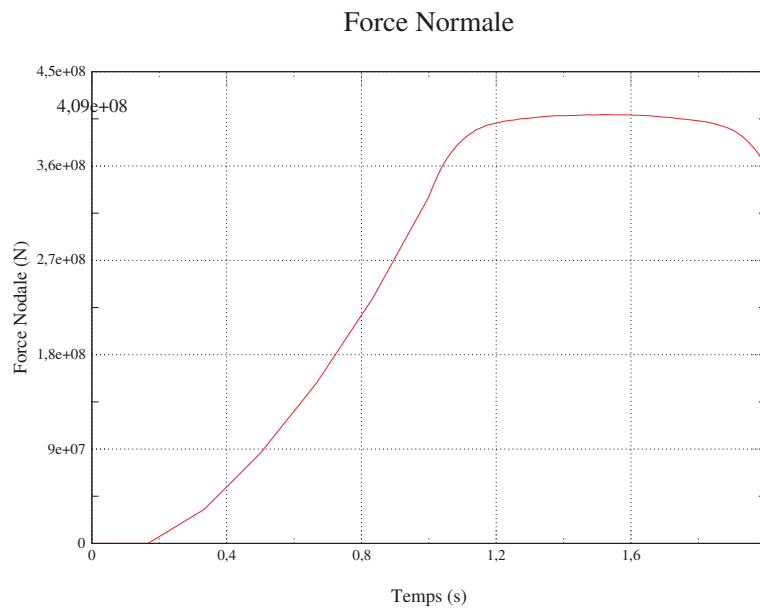


FIGURE 6.14 – Réaction normale au niveau du poinçon, cas linéaire.

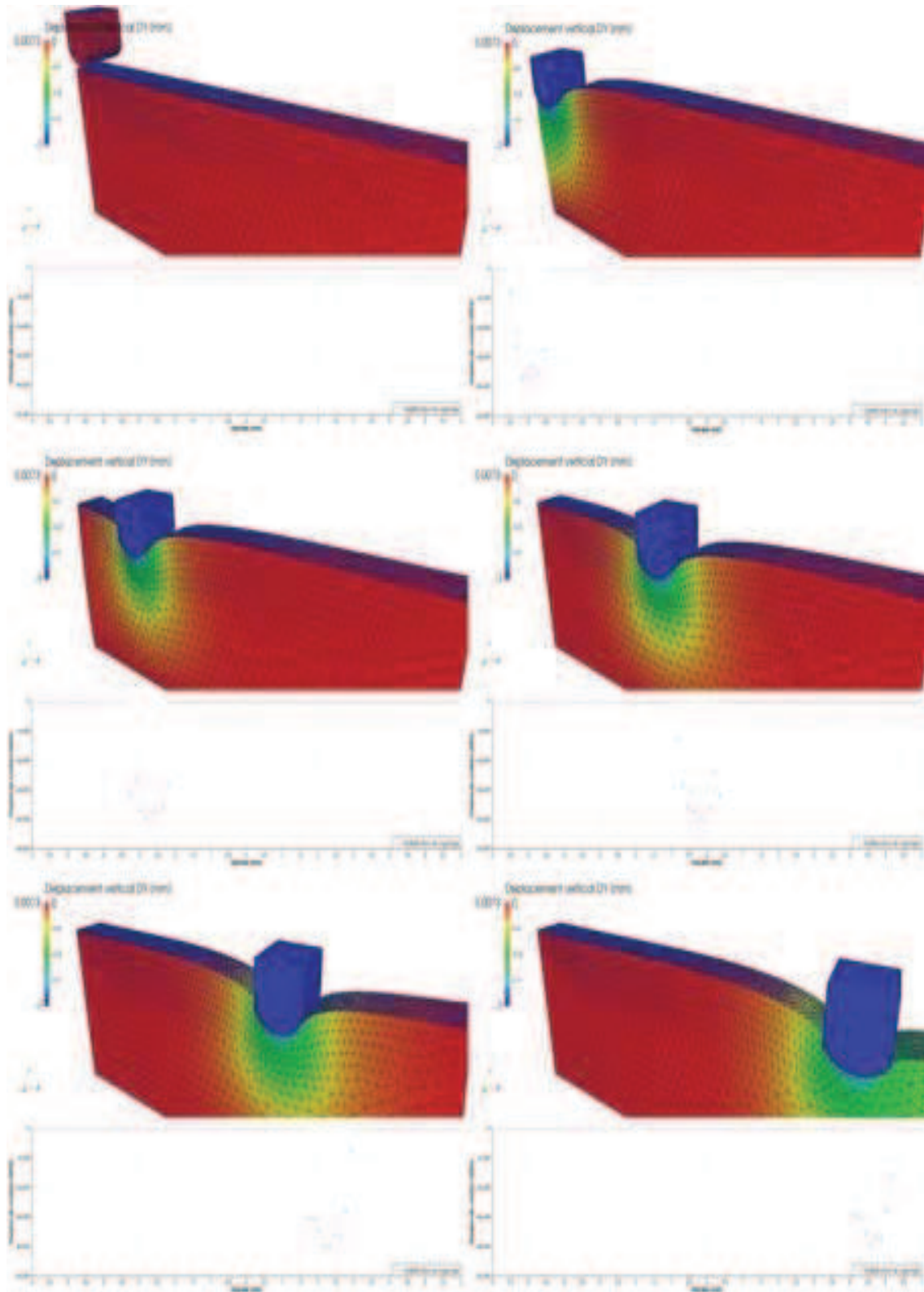


FIGURE 6.15 – Cas linéaire : déplacement vertical sur la configuration déformée et pression de contact pour différents temps “de chargement”, $t = 0s$, $t = 1s$, $t = 1.25s$, $t = 1.5s$, $t = 1.75s$ et $t = 2s$.

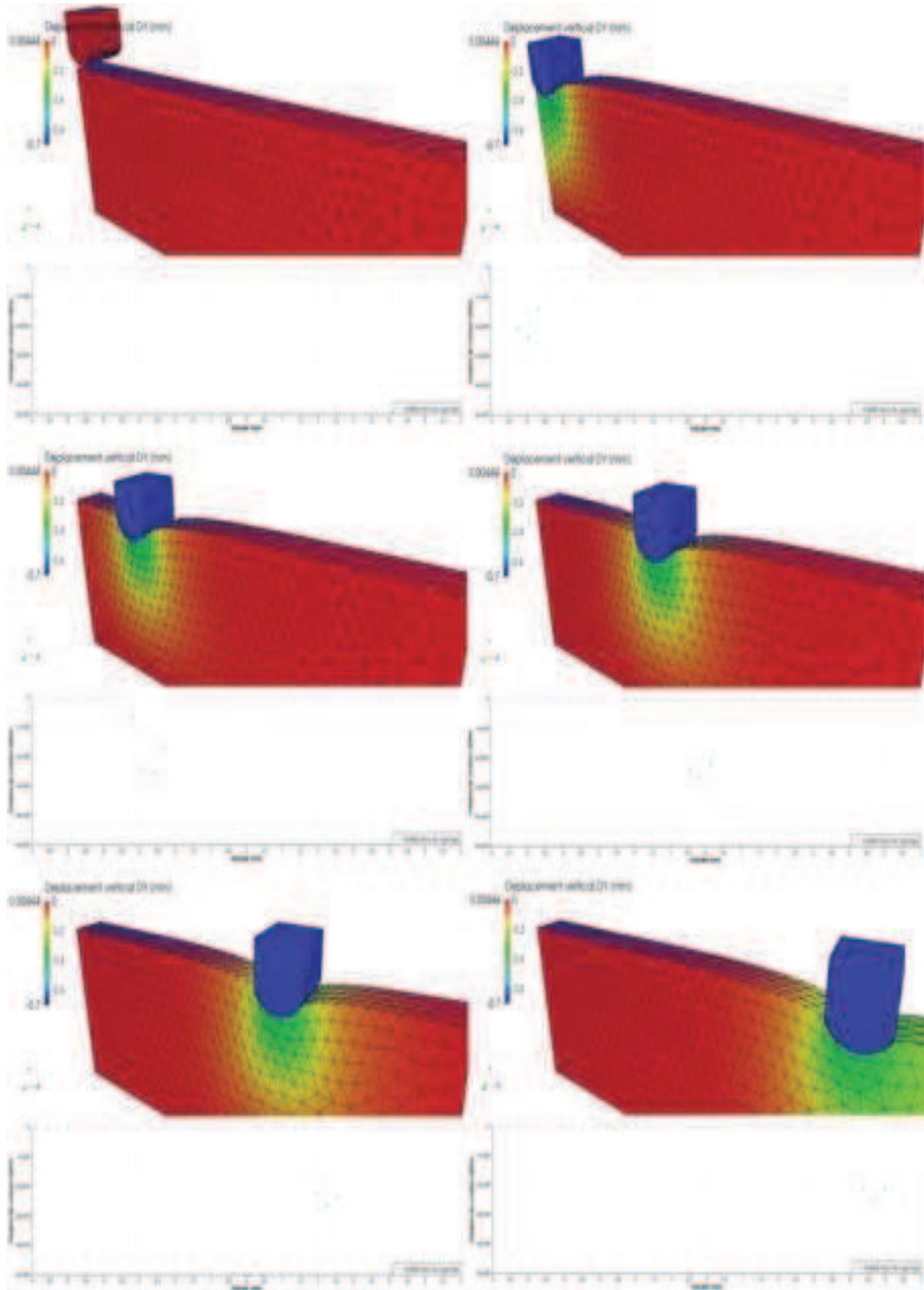


FIGURE 6.16 – Cas quadratique : déplacement vertical sur la configuration déformée et pression de contact pour différents temps “de chargement”, $t = 0s$, $t = 1s$, $t = 1.25s$, $t = 1.5s$, $t = 1.75s$ et $t = 2s$.

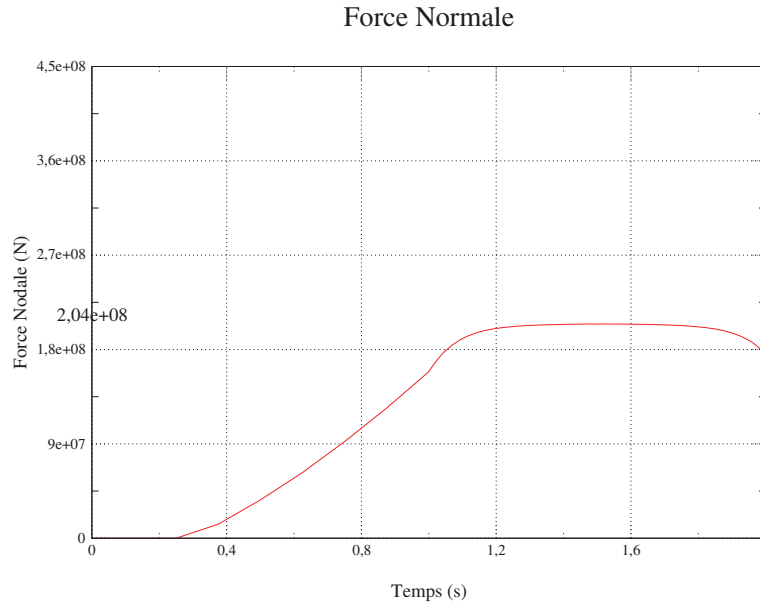


FIGURE 6.17 – Réaction normale au niveau du poinçon, cas quadratique (enfoncement à $0.7mm$).

6.2.3 Conclusion

Ce test nous a permis d’aborder un premier cas couplant grandes déformations, grands déplacements avec une interface de contact courbe. Dans le cas bidimensionnel, les résultats obtenus avec la nouvelle méthode sont de très bonne qualité, aussi bien au niveau global (réaction normale au niveau du poinçon, déplacements, etc...), qu’au niveau local (pression de contact). Dans le cas tridimensionnel, ce test permet de montrer une limitation de la première version de développement. En effet, bien que l’on converge vers des résultats d’assez bonne qualité dans le cas linéaire, on a été obligé de limiter l’enfoncement du poinçon et donc le niveau de déformation pour réussir à faire converger l’algorithme de Newton dans le cas quadratique. Cependant, on arrive à retrouver les caractéristiques de qualité des pressions de contact exhibées dans le chapitre précédent. Dans le cas linéaire on observe quelques oscillations (principalement dans le cas tridimensionnel) alors qu’il n’y a pas d’oscillations perceptibles dans le cas quadratique.

6.3 Ecrasement d’un demi anneau élastique

Dans ce cas test, on va considérer l’écrasement d’un demi anneau bi-matériaux hyper-élastique sur un socle hyper-élastique. Ce test permet de prendre en compte les grands déplacements, les grandes déformations et les grands glissements couplés à des transitions contact/non-contact. C’est un cas test courant dans la littérature dans le cas 2D voir [32, 65, 80]. On utilisera les résultats obtenus par Y. Renard et K. Poulios comme référence [65] dans le cas du contact sans-frottement ($\mathcal{F} = 0.0$), voir Figures 6.19 et 6.20.

6.3.1 Présentation du cas test

6.3.1.1 Configuration 2D

On considère un demi-anneau hyper-élastique composé de deux matériaux (diamètres externe $190mm$ et interne $170mm$) et un socle hyper-élastique de longueur $250mm$ et hauteur $50mm$, voir Figure 6.18. On impose un déplacement vertical de $-90mm$ à chaque extrémité du demi-anneau et on encastre la base du socle. On considère principalement deux variables d'intérêt : le déplacement du milieu du demi-anneau en fonction du pas de chargement (on utilise 60 pas de chargement à partir du contact soit environ $1.16mm$ par pas de chargement) et la pression de contact.

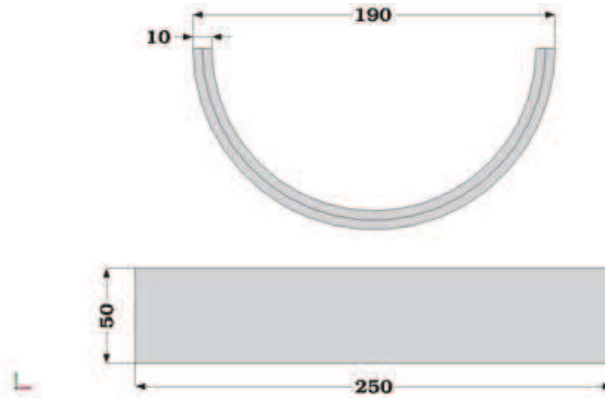


FIGURE 6.18 – Configuration du cas test en 2D

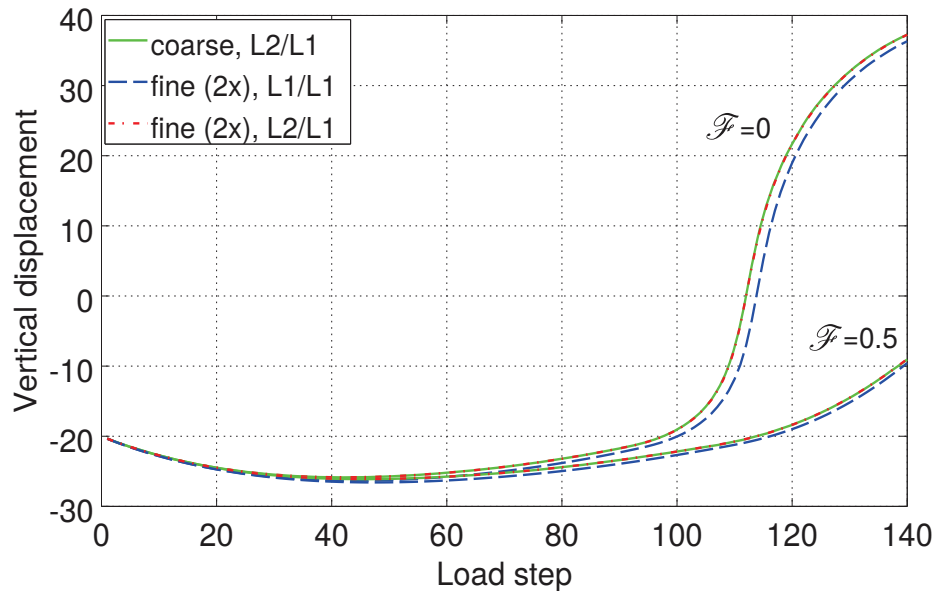


FIGURE 6.19 – Déplacement du centre de la zone de contact de l'anneau en fonction du pas de chargement "imposé", provenant de [65].

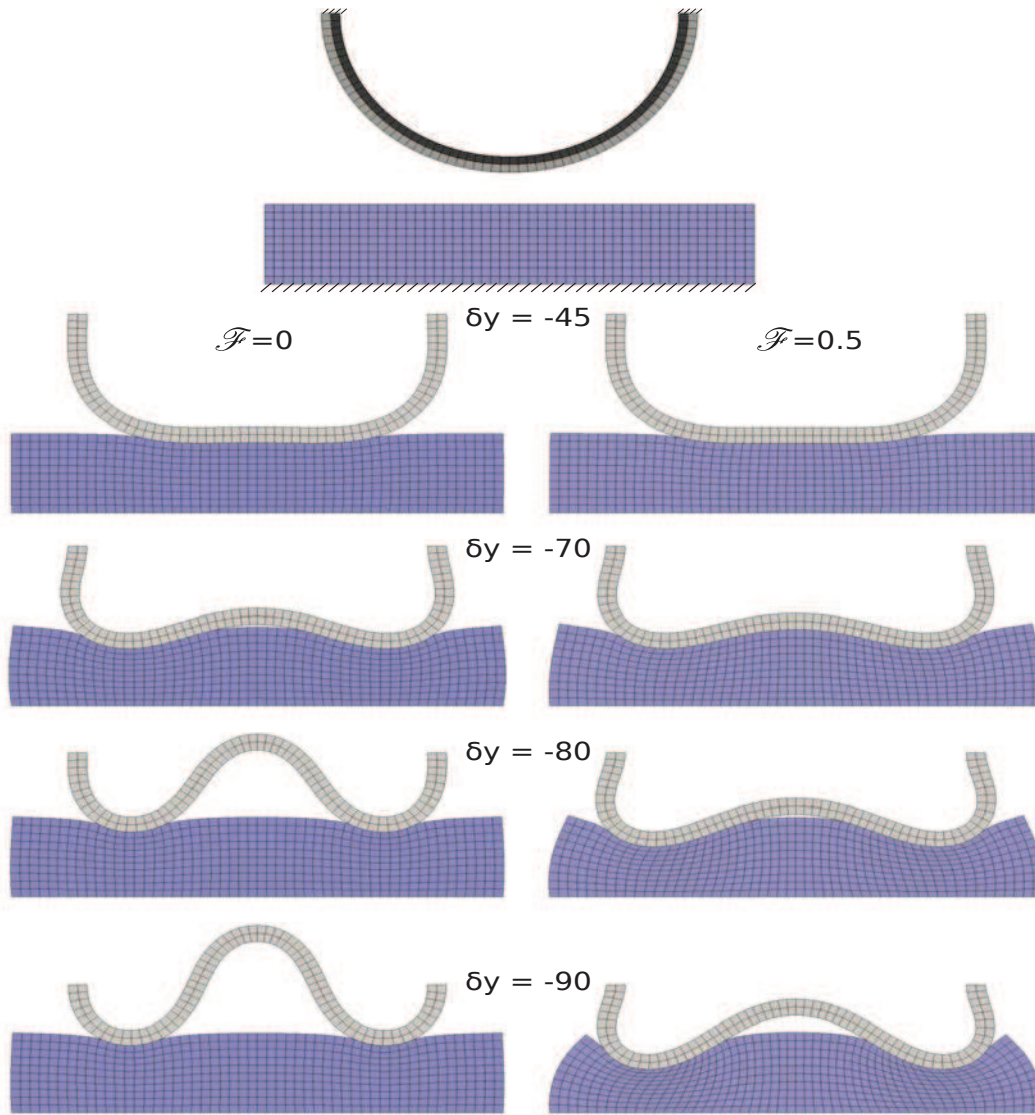


FIGURE 6.20 – Configuration déformée en fonction du chargement, résultats issus de [65].

6.3.1.2 Configuration 3D

On considère l'extension, par extrusion, du test précédent au cas 3D, voir Figure 6.21. On impose les mêmes conditions limites. Cependant en utilisant les symétries du problème, on modélisera uniquement un quart du problème. Le passage du test en 3D par extrusion engendre l'apparition du problème des macro-maillles de contact semi intersectées. En effet, dans ce cas de figure avec dilatation, l'anneau élastique ne recouvre pas entièrement toutes les macro-maillles de contact actives, ce qui représente une difficulté importante supplémentaire, (voir [63] et Section 3.3). Les résultats de référence restent les mêmes que dans le cas 2D.

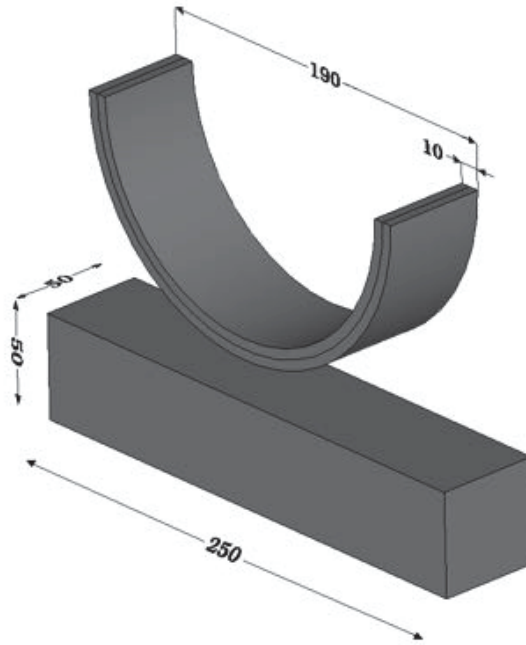


FIGURE 6.21 – Configuration du cas test en 3D

6.3.2 Analyse des résultats

6.3.2.1 Cas 2D

On considère quatre maillages de calcul, les caractéristiques des maillages sont données dans le Tableau 6.8

Maillages	Nœuds	Éléments
QUAD 4 grossier	764	620
QUAD 8 grossier	1706	500
QUAD 4 fin	2526	2240
QUAD 8 fin	6410	2000

TABLE 6.8 – Maillages 2D considérés.

Les résultats sont présentés dans les Figures 6.24, 6.25 (cas linéaire et quadratique fin), et les déplacements du centre de l'anneau élastique en fonction du déplacement imposé sur les extrémités de l'anneau sont présentés dans les Figures 6.22 et 6.23 (maillages grossier et fin). Le Tableau 6.9 présente les valeurs minimum et maximum du déplacement du centre de la zone de contact de l'anneau. Tous les ordres de grandeurs sont respectés, excepté pour le cas linéaire grossier. La courbe du déplacement du centre de la zone de contact de l'anneau en fonction du chargement imposé est totalement cohérente avec les résultats de référence. On remarque que dans le cas linéaire on améliore nettement les résultats en raffinant, on tend alors vers les résultats du cas quadratique. En effet,

la qualité du maillage grossier en quadrangles à 4 nœuds ne permet pas d'obtenir des résultats cohérents quantitativement avec les valeurs de référence, cependant du point de vue qualitatif le comportement de l'anneau élastique concorde bien. Dans le cas linéaire, la qualité des pressions de contact est satisfaisante mais se dégrade légèrement quand la zone de contact devient petite et courbe. Dans le cas quadratique, on ne remarque aucune oscillation perceptible.

Déplacement du centre de l'anneau élastique

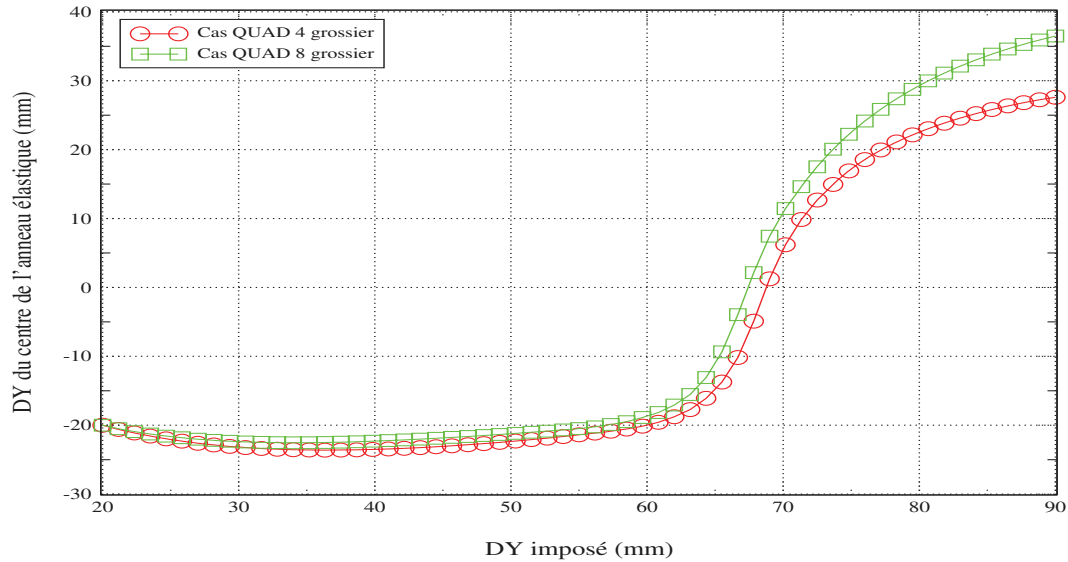


FIGURE 6.22 – Déplacement du centre de la zone de contact de l'anneau en fonction du déplacement imposé aux extrémités, maillages grossiers.

Déplacement du centre de l'anneau élastique

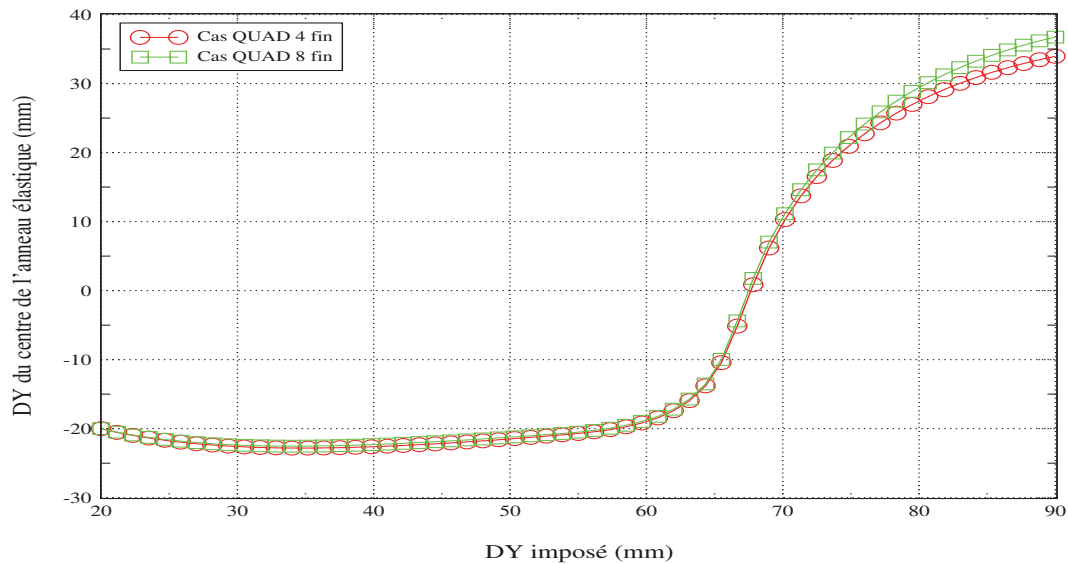


FIGURE 6.23 – Déplacement du centre de la zone de contact de l'anneau en fonction du déplacement imposé aux extrémités, maillages fins.

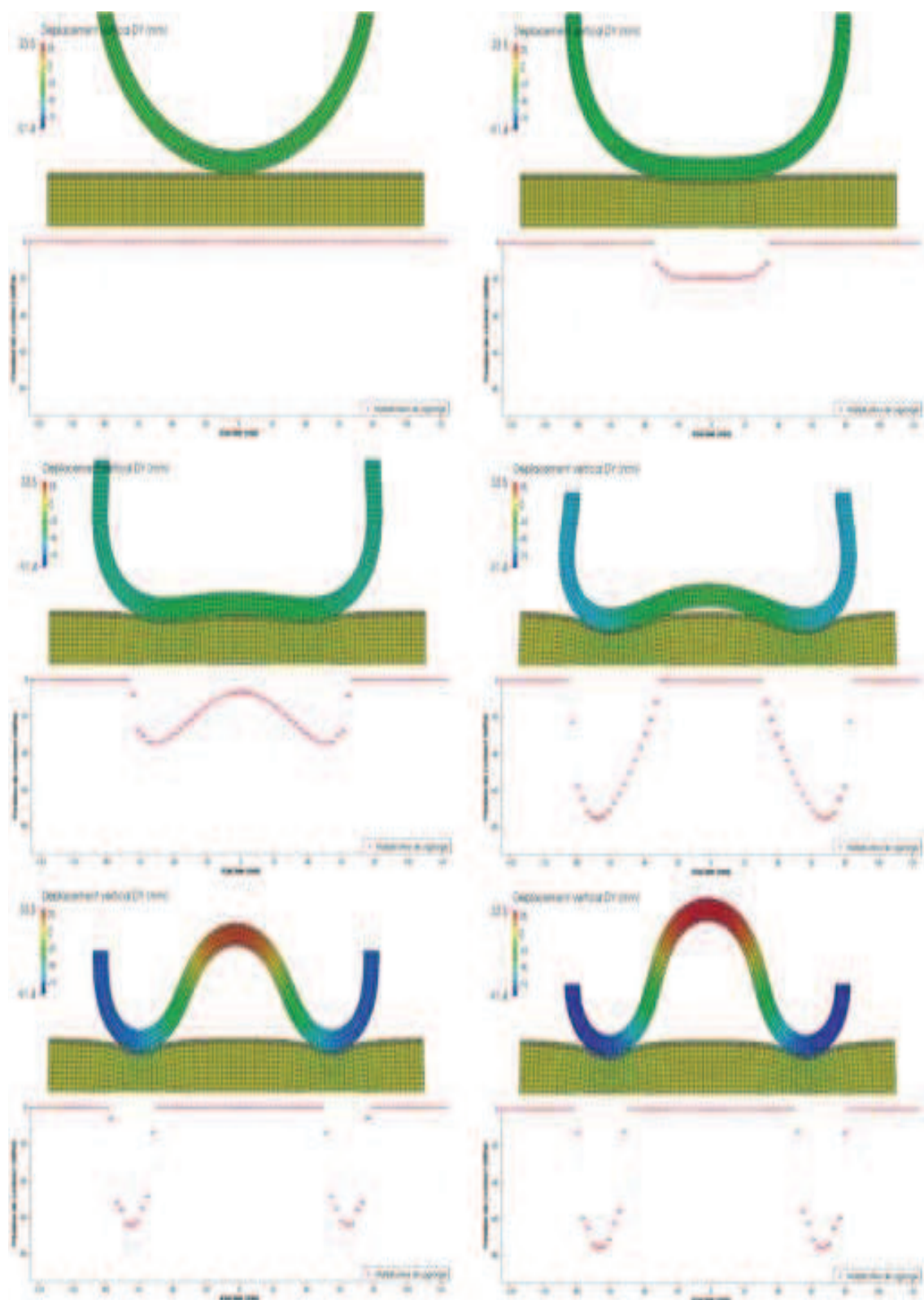


FIGURE 6.24 – Cas linéaire : déplacement vertical sur la configuration déformée et pression de contact pour différents pas de chargement, $dy = 20mm$, $dy = 34mm$, $dy = 48mm$, $dy = 62mm$, $dy = 76mm$ et $dy = 90mm$.

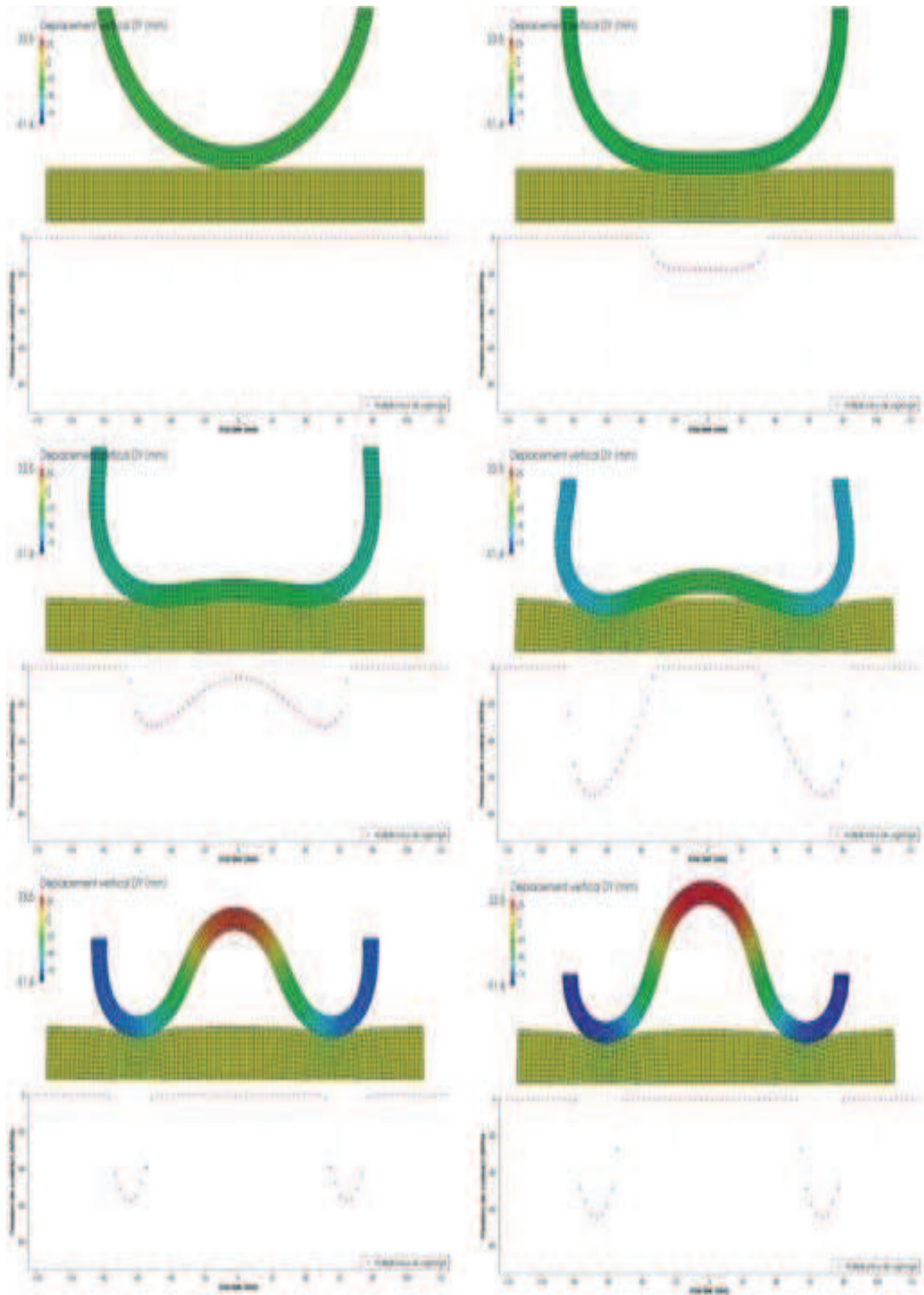


FIGURE 6.25 – Cas quadratique : déplacement vertical sur la configuration déformée et pression de contact pour différents pas de chargement, $dy = 20mm$, $dy = 34mm$, $dy = 48mm$, $dy = 62mm$, $dy = 76mm$ et $dy = 90mm$.

Maillage considéré	Déplacement du centre de l'anneau	
	minimum	maximum
QUAD 4 grossier	-23.6mm	27.6mm
QUAD 8 grossier	-22.5mm	36.5mm
QUAD 4 fin	-22.8mm	33.9mm
QUAD 8 fin	-22.5mm	36.7mm

TABLE 6.9 – Déplacement minimum et maximum du centre de la zone de contact du demi anneau élastique, cas 2D.

6.3.2.2 Cas 3D

On considère cinq maillages de calcul, les caractéristiques des différents maillages sont présentées dans la Figure 6.10.

Maillages	Nœuds	Éléments
HEXA 8 grossier	3045	2050
HEXA 20 grossier	10993	2050
HEXA 27 grossier	13998	1450
HEXA 8 fin	17838	14000
HEXA 27 fin	102114	11600

TABLE 6.10 – Maillages 3D considérés.

Les résultats sont présentés dans les Figures 6.28, 6.29 (cas linéaire et quadratique fin), et les déplacements du centre de l'anneau élastique en fonction du déplacement imposé sur les extrémités de l'anneau sont présentés dans les Figures 6.26 et 6.27 (maillages grossiers et fins). Le Tableau 6.11 donne les valeurs minimum et maximum du déplacement du centre de la zone de contact de l'anneau pour les différents maillages considérés. On observe des comportements similaires au cas de l'étude 2D. Les résultats obtenus sur les maillages quadratiques et sur le maillage linéaire fin concordent bien avec les résultats de référence. On remarque plus nettement les défauts sur les pressions de contact issues des résultats sur le maillage linéaire au niveau des zones de transition contact/non-contact que dans le cas 2D. Comme précédemment, la distribution des pressions de contact obtenue sur le maillage quadratique ne présente pas d'oscillation apparente. On remarque dans les Figures 6.28 et 6.29 l'apparition pour certains pas de chargement du cas de figure des macro-maillages en contact semi-intersectée. Ce cas est géré en utilisant un paramètre d'exclusion du contact pour les macro-maillages possédant un coefficient d'intersection trop faible. Il nous a été à l'heure actuelle impossible de faire converger jusqu'au pas de chargement final le calcul sur le maillage fin en hexaèdres à 20 nœuds (on reste bloqué à 62mm environ de déplacement vertical imposé sur les bords du demi-anneau). En effet, il semble que l'on se heurte à la même difficulté que dans le cas test précédent. Une analyse plus approfondie de ce problème devra être envisagée, des choix algorithmiques au niveau du calcul des matrices (choix des surfaces d'intégration, de la normale etc...) peuvent être en cause.

Déplacement du centre de l'anneau élastique

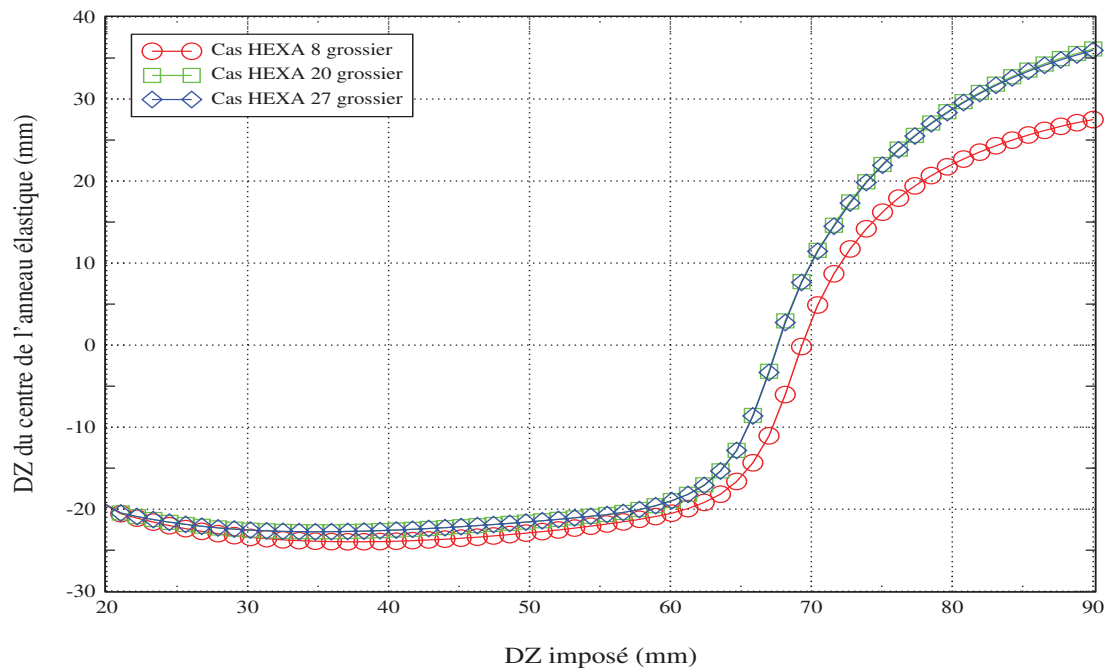


FIGURE 6.26 – Déplacement du centre de l'anneau en fonction du déplacement imposé aux extrémités, maillages grossiers.

Déplacement du centre de l'anneau élastique

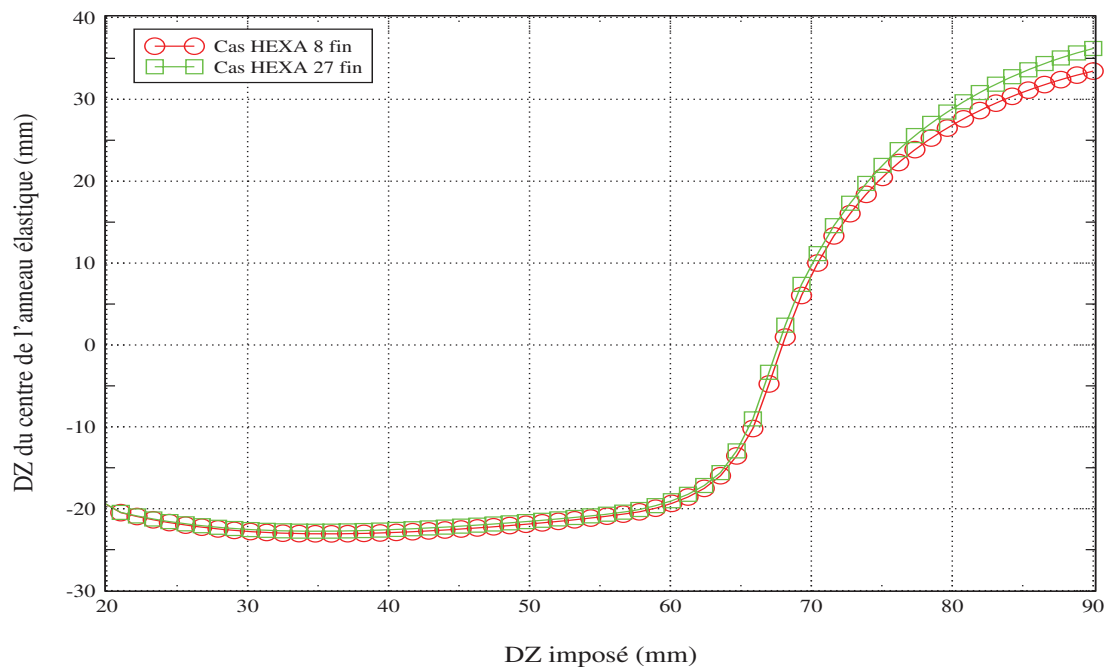


FIGURE 6.27 – Déplacement du centre de l'anneau en fonction du déplacement imposé aux extrémités, maillages fins.

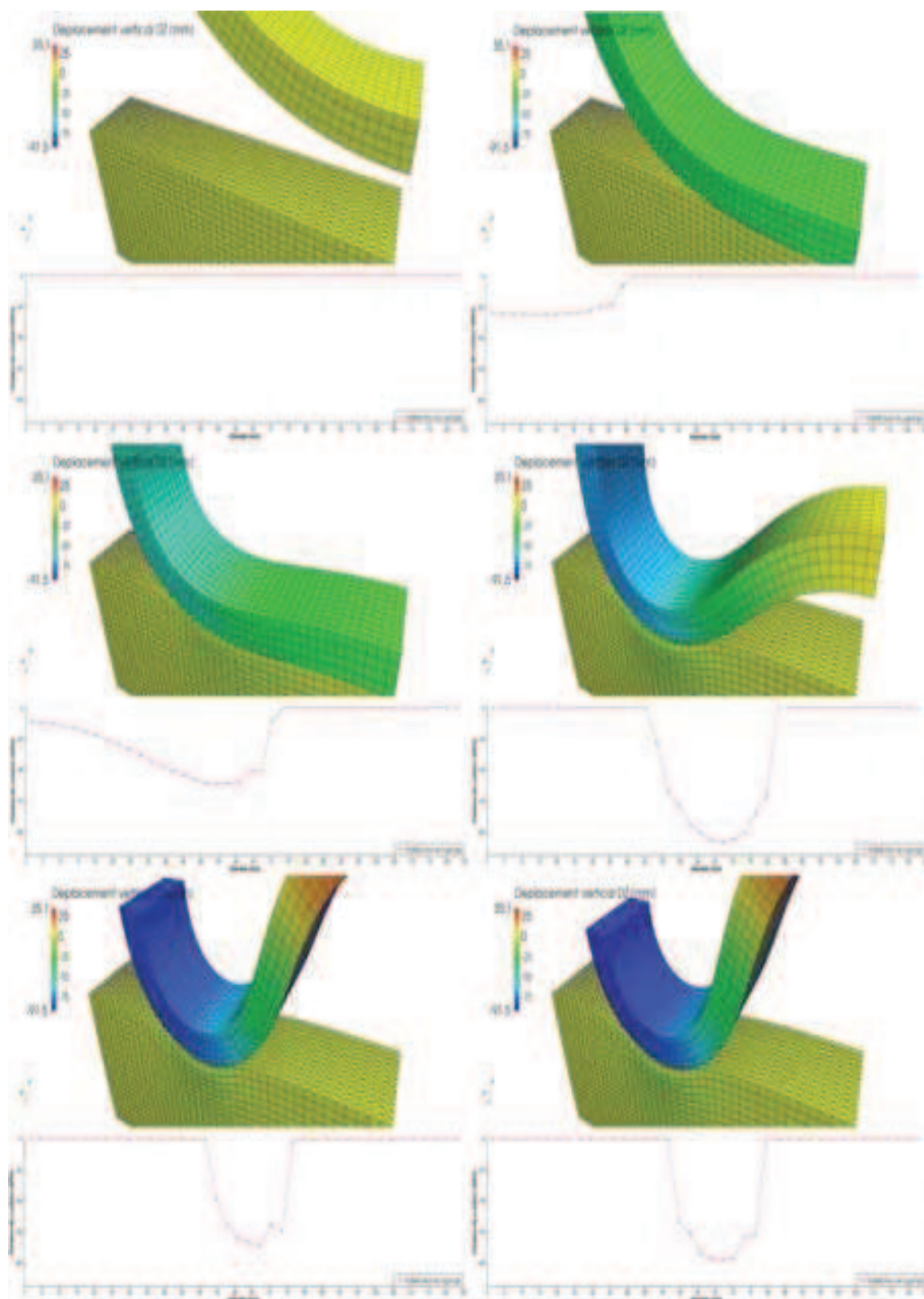


FIGURE 6.28 – Cas linéaire (HEXA 8) : déplacement vertical sur la configuration déformée et pression de contact pour différents pas de chargement, $dy = 0mm$, $dy = 35.95mm$, $dy = 52.05mm$, $dy = 68.15mm$, $dy = 84.25mm$ et $dy = 90mm$.

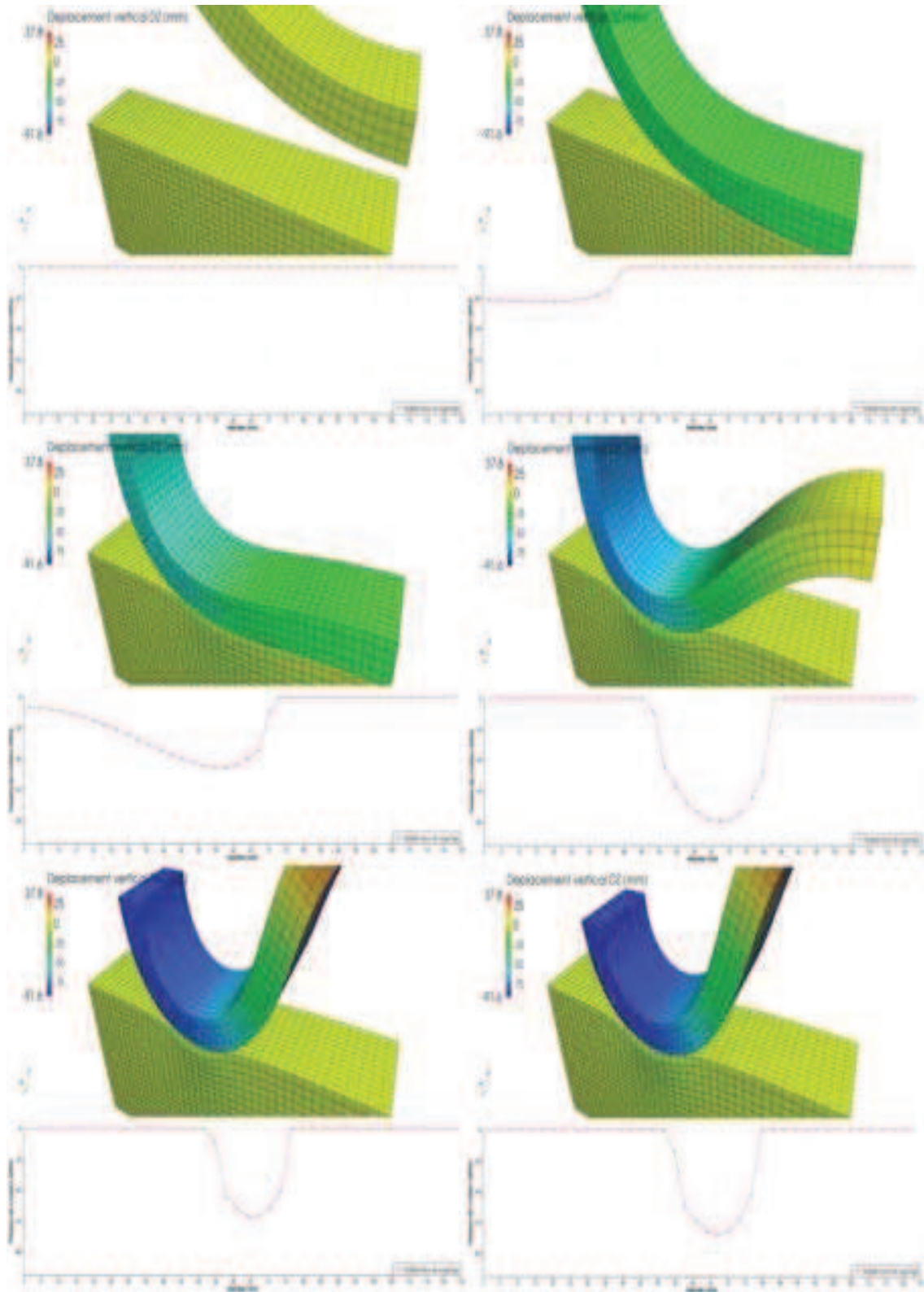


FIGURE 6.29 – Cas quadratique (HEXA 27) : déplacement vertical sur la configuration déformée et pression de contact pour différents pas de chargement, $dy = 0mm$, $dy = 35.95mm$, $dy = 52.05mm$, $dy = 68.15mm$, $dy = 84.25mm$ et $dy = 90mm$.

Maillage considéré	Déplacement du centre de l'anneau	
	minimum	maximum
HEXA 8 grossier	-24mm	27.5mm
HEXA 20 grossier	-22.8mm	36.1mm
HEXA 27 grossier	-22.8mm	35.9mm
HEXA 8 fin	-23.1mm	33.4mm
HEXA 27 fin	-22.7mm	36.2mm

TABLE 6.11 – Déplacement minimum et maximum du centre de la zone de contact du demi anneau élastique, cas 3D.

6.3.3 Conclusion

Bien que ce cas test soit très complexe, la méthode LAC permet d'obtenir des résultats de bonne qualité et concordant globalement très bien avec les résultats de référence. On note que la qualité des distributions de la pression de contact est meilleure lors de l'utilisation d'éléments finis d'ordre 2, (surtout dans le cas tridimensionnel). Malgré tout, il subsiste une piste d'amélioration pour identifier et corriger le problème bloquant la convergence du cas maillé avec des hexaèdres à 20 nœuds. De plus, on note que la méthode se comporte bien vis-à-vis du cas pathologique des macro-maillages semi-intersectés en contact.

6.4 Validation d'un modèle sain d'ailette d'un rotor BP100

Afin de confronter la méthode LAC à une étude industrielle, on va considérer la validation du modèle complet attache et ailette terminale d'un rotor BP100. Ce modèle a été développé à la division R&D d'EDF pour pouvoir répondre à des questions de tenue des composants en présence de fissures en fond de cran (voir Introduction). Le but de ce dernier test est de dégager les avantages et les inconvénients de la méthode dans un cadre d'utilisation réaliste.

6.4.1 Présentation du modèle

Pour des raisons de symétrie et de simplification, le modèle considère uniquement une des 77 ailettes et son attache. Les propriétés du matériau sont les suivantes :

- module de Young, $E = 2.1 \cdot 10^{11} Pa$,
- coefficient de Poisson, $\nu = 0.3$,
- masse volumique, $\rho = 7800 kg/m^3$,
- comportement élastique linéaire.

Le chargement volumique de la structure correspond à une force centrifuge équivalente à une rotation de $1500t/min$. On impose les conditions aux limites suivantes :

- blocage des mouvements de corps rigides,
- blocage du glissement de l'ailette dans son attache,
- répétition de cycle,

- contact entre l’attache et le pied de l’ailette (10 zones).

On résout le problème en quasi-statique non linéaire en utilisant la formulation LAC pour résoudre le problème de contact. Pour valider le modèle, on va principalement utiliser la répartition de charge sur les différents crans de l’ailette donnée par le constructeur, voir Tableau 6.12. De plus on comparera les résultats (déplacements, répartition de pression et contraintes équivalentes de Von Mises, voir les Tableaux 6.13, 6.14 et la Figure 6.31) avec ceux obtenus sur le modèle déjà validé utilisant la formulation Continue du contact dans **Code_Aster** avec un maillage “presque” compatible comportant 10^6 DDL (environ 300000 nœuds).

Cran	Extrados	Intrados	Total
SUP	13.1%	11.5%	24.6%
MDS	8.5%	8.6%	17.1%
MED	8.0%	8.6%	16.6%
MDI	8.7%	9.3%	18.0%
INF	11.2%	12.5%	23.7%
Total	49.5%	50.5%	100%

TABLE 6.12 – Répartition des pressions de contact donnée par le constructeur.

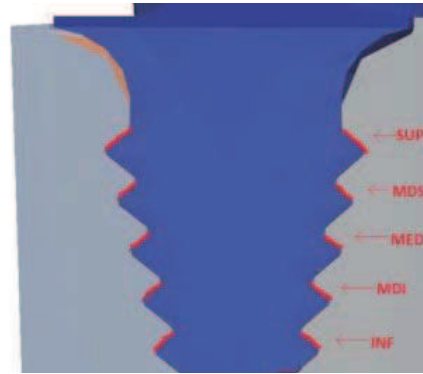


FIGURE 6.30 – Nommage des crans de l’attache en “pied de sapin”.

Cran	Extrados		Intrados		Total	
	Valeur	Écart	Valeur	Écart	Valeur	Écart
SUP	13.4%	+2.3%	11.7%	+1.7%	25.1%	+2.0%
MDS	7.8%	-8.2%	7.9%	-8.1%	15.7%	-8.2%
MED	7.2%	-10%	7.5%	-12.8%	14.7%	-11.5%
MDI	7.8%	-10.3%	8.1%	-12.9%	15.9%	-11.7%
INF	13.3%	+18.8%	15.3%	+22.4%	28.6%	+20.7%
Total	49.5%	–	50.5%	–	100%	–

TABLE 6.13 – Répartition des pressions de contact sur le modèle numérique de référence.

Cran	Extrados	Intrados
SUP	227	186
MDS	305	198
MED	352	206
MDI	526	260
INF	2578	612

TABLE 6.14 – Contraintes de Von Mises maximales en fond de cran (MPa) obtenues sur le modèle de référence.

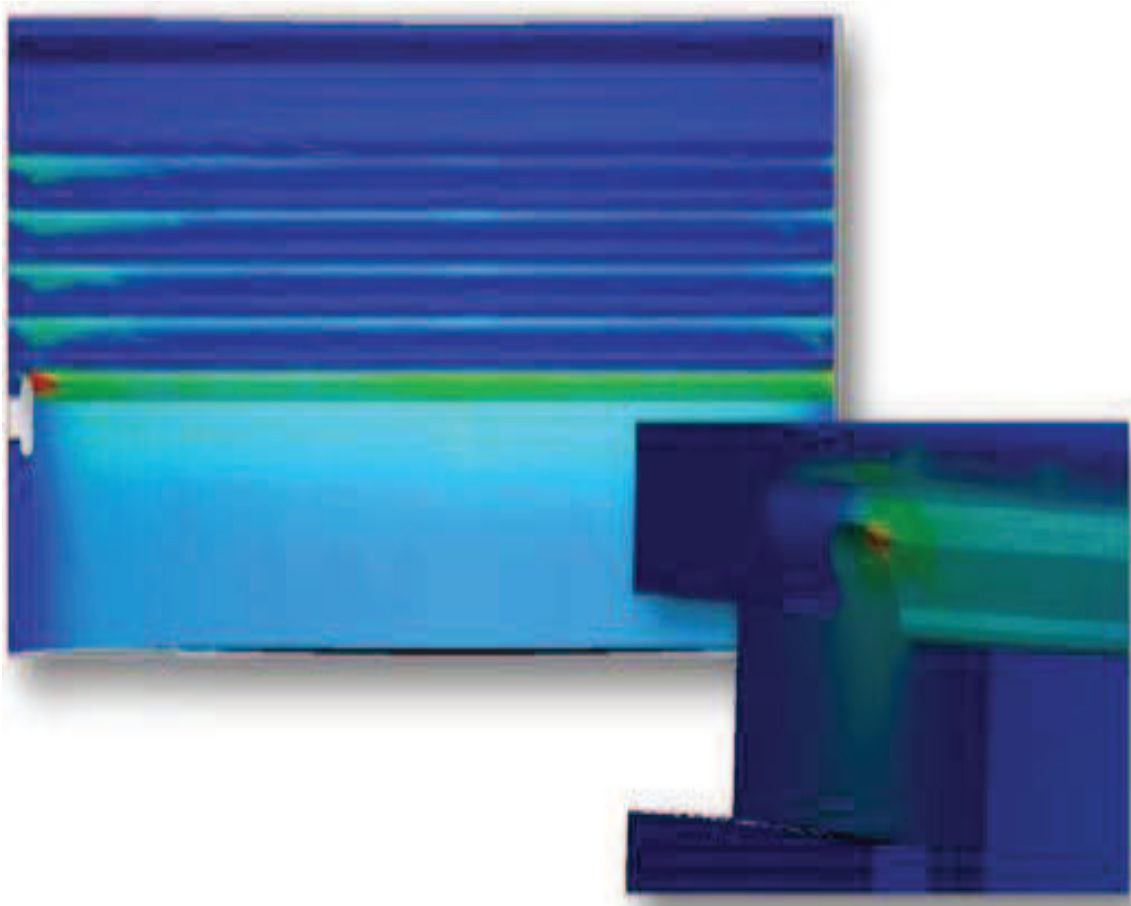


FIGURE 6.31 – Localisation du maximum des contraintes de Von Mises à l'intersection de la gorge de jonc d'arrêt et du cran inférieur côté extradados (lieu d'amorçage de fissures).

On va considérer deux maillages de calcul incompatibles, un linéaire et un quadratique, voir les Figures 6.32, 6.33 et le Tableau 6.15. Ces deux maillages permettront de voir si la méthode permet d'obtenir des résultats comparables à ceux obtenus lors de l'étude initiale sur maillage compatible et si l'on arrive à obtenir des résultats sur un maillage quadratique. On s'intéresse à trois valeurs d'intérêts :

- les valeurs de déplacements,
- la répartition des pressions de contact,
- les valeurs maximales en fond de cran et la répartition des contraintes de Von Mises.



FIGURE 6.32 – Maillage fin du modèle ailette + attache.

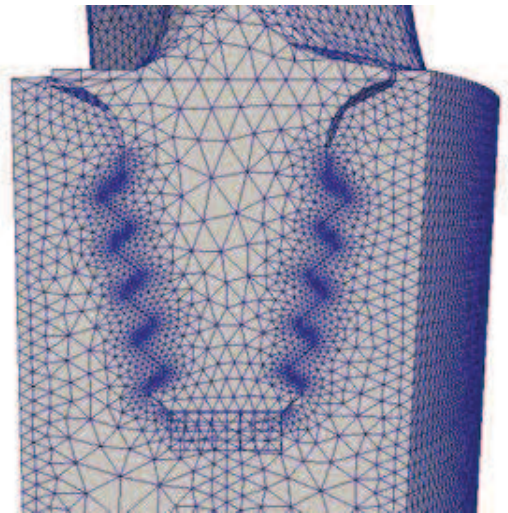


FIGURE 6.33 – Zoom sur le pied de l'ailette.

Maillages	Nœuds	Macro-maillages de contact
Linéaire	121852	6000
Quadratique	332544	2400

TABLE 6.15 – Maillages considérés.

6.4.2 Validation du modèle avec prise en compte du contact par la méthode LAC

De manière générale la méthode LAC se comporte bien. L'algorithme de Newton généralisé converge bien contrairement au cas où on utilise la méthode de type Continue qui nécessite, pour les maillages incompatibles, de dégrader l'approche Newton généralisé en utilisant une boucle de point fixe pour gérer la convergence géométrique du problème. Cependant on remarque un point négatif imprévu. La détection du contact qui est logiquement mise en partie en défaut dans le cas linéaire n'est pas améliorée par l'utilisation d'une approximation quadratique, notamment du côté intrados. Ce défaut pourrait provenir du trop faible raffinement de la zone de contact (on dispose d'uniquement 2400 macro-maillages de contact contre 6000 dans le cas linéaire) mais on peut aussi soupçonner un défaut de robustesse de l'algorithme de projection-intersection. Pour cette raison, le multiplicateur de Lagrange de contact est difficilement exploitable, du fait de l'introduction de multiplicateurs nuls parasites. On utilisera donc les pressions de contact recalculées à partir du tenseur des contraintes de Cauchy. On attire aussi l'attention sur le fait que la nouvelle méthode de gestion du contact nous a permis d'obtenir des résultats sur le maillage quadratique alors qu'il nous a été, pour le moment, impossible de faire converger le calcul avec la méthode Continue.

6.4.2.1 Résultats en déplacement

Les résultats en déplacement sont cohérents avec le chargement appliqué, voir Figures 6.34 et 6.35. On observe une torsion du voile notable alors que le reste de la structure reste relativement fixe.

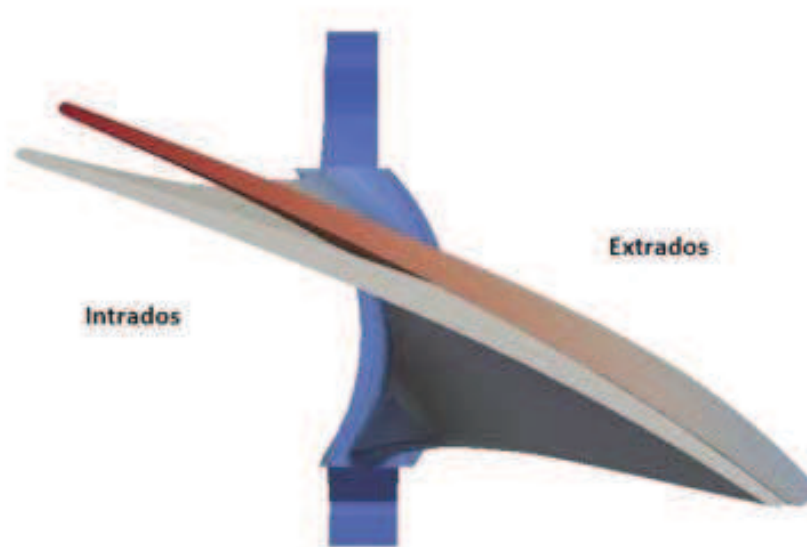


FIGURE 6.34 – Déformée de l'ailette, cas linéaire.

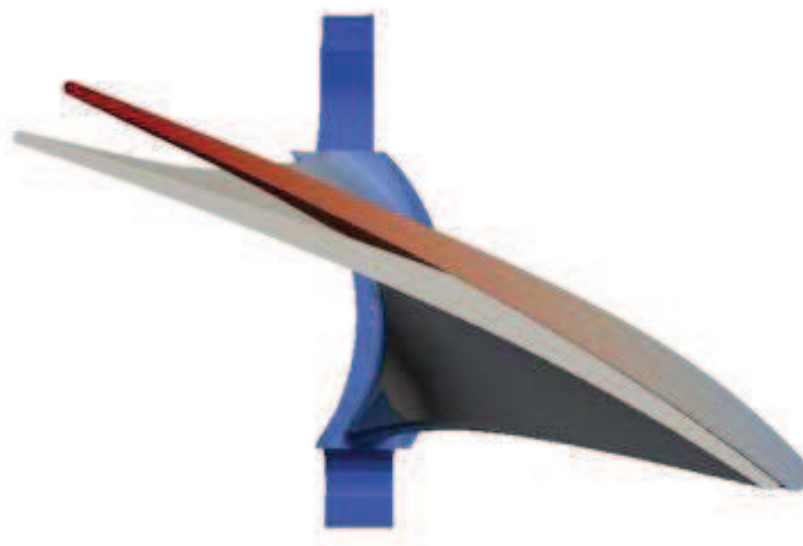


FIGURE 6.35 – Déformée de l'ailette, cas quadratique.

6.4.2.2 Répartition des pressions de contact

Les répartitions des pressions de contact sont présentées dans les Tableaux 6.16, 6.17 et 6.18, 6.19 (pour les cas linéaire et quadratique respectivement). On remarque que les résultats sont globalement de bonne qualité. On obtient des résultats aussi précis que les résultats numériques de référence obtenus sur le maillage “presque” compatible. Dans tous les tableaux, on soulignera les résultats s’écartant de plus de 10% des données constructeur (en rouge) et ceux s’écartant de moins de 5% (en bleu). Enfin, on note que l’utilisation de maillage non-compatible avec la méthode Continue mène à des écarts locaux importants jusqu’à 54.35% tout en gardant des écarts généraux (côté extrados ou intrados) raisonnables de 2.74% à 11.78%.

Cran	Extrados		Intrados		Total	
	Valeur	Écart	Valeur	Écart	Valeur	Écart
SUP	16.09%	+22.81%	10.98%	-4.48%	27.07%	+10.05%
MDS	9.01%	+5.95%	6.01%	-30.1%	15.02%	-12.18%
MED	7.72%	-3.53%	5.39%	-37.34%	13.11%	-21.04%
MDI	8.28%	-4.78%	6.58%	-29.26%	14.86%	-17.43%
INF	14.06%	+25.54%	15.88%	+27.03%	29.94%	+26.39%
Total	55.16%	+11.43%	44.84%	-11.2%	100%	—

TABLE 6.16 – Répartition des pressions de contact pour le maillage linéaire, côté esclave.

Cran	Extrados		Intrados		Total	
	Valeur	Écart	Valeur	Écart	Valeur	Écart
SUP	16.24%	+24%	12.64%	+9.91%	28.88%	+17.41%
MDS	8.48%	-0.2%	9.1%	+5.84%	17.59%	+2.24%
MED	7.61%	-4.9%	8.55%	-0.55%	16.16%	-2.64%
MDI	8.09%	-7.01%	9.17%	-1.37%	17.26%	-4.1%
INF	9.23%	-17.68%	10.89%	-12.9%	20.11%	-15.16%
Total	49.65%	+0.29%	50.35%	-0.29%	100%	—

TABLE 6.17 – Répartition des pressions de contact pour le maillage linéaire, côté maître.

Les résultats pour le maillage linéaire sont globalement en bon accord avec les résultats numériques de référence du côté maître. Cependant, les résultats côté esclave sont fortement dégradés de manière générale. En fait, ce phénomène peut être expliqué par le fait que le maillage est de moindre qualité (ceci est dû à l’introduction d’un nœud supplémentaire ne respectant pas la géométrie du problème et dégradant la qualité du maillage surfacique) et que l’on a pas été en mesure d’effectuer un post-traitement pour ramener les résultats sur le maillage d’origine.

Cran	Extrados		Intrados		Total	
	Valeur	Écart	Valeur	Écart	Valeur	Écart
SUP	13.75%	+4.98%	9.94%	-13.58%	23.69%	-3.7%
MDS	9.09%	+6.98%	7.92%	-7.9%	17.01%	-0.5%
MED	8.25%	+3.13%	8.12%	-5.53%	16.37%	-1.36%
MDI	8.9%	+2.31%	9.31%	+0.11%	18.21%	+1.17%
INF	11.86%	+5.82%	12.86%	+2.87%	24.72%	+4.26%
Total	51.85%	+4.74%	48.15%	-4.65%	100%	—

TABLE 6.18 – Répartition des pressions de contact pour le maillage quadratique, côté esclave.

Cran	Extrados		Intrados		Total	
	Valeur	Écart	Valeur	Écart	Valeur	Écart
SUP	12.77%	-2.5%	9.5%	-17.43%	22.27%	-9.48%
MDS	9.18%	+7.95%	5.89%	-31.54%	15.06%	-11.91%
MED	8.34%	+4.31%	9.22%	+7.19%	17.56%	+5.8%
MDI	8.39%	-3.53%	10.63%	+14.35%	19.03%	+5.71%
INF	12.22%	+9.06%	13.86%	+5.71%	26.08%	+10.03%
Total	50.9%	+2.83%	49.1%	-2.77%	100%	—

TABLE 6.19 – Répartition des pressions de contact pour le maillage quadratique, côté maître.

Les résultats pour le maillage quadratique sont globalement en très bon accord avec les valeurs données par le constructeur ; pour chaque niveau de cran, on ne s'écarte pas de plus de 5% pour les résultats côté esclave. Cependant on remarque que les résultats sont moins bons pour l'intrados, notamment du côté maître, ceci provient très probablement du fait que c'est sur cette partie de l'attache où les défauts de détection du contact sont le plus importants. Les contraintes σ_n^e et σ_n^m ne respectent plus alors le principe d'action réaction, et l'on observe une forte disparité des résultats entre les côtés maître et esclave pour l'intrados, ce qui ne correspond pas à la condition de contact physique.

6.4.2.3 Répartition des contraintes de Von Mises

La localisation du maximum des contraintes de Von Mises est présentée dans les Figures 6.36, 6.37 et 6.38, 6.39 (cas linéaire et quadratique respectivement). Les récapitulatifs des maxima de contraintes cran par cran sont présentés dans les Tableaux 6.20 et 6.21 (cas linéaire et quadratique respectivement). La localisation du maximum des contraintes concorde parfaitement avec celle observée sur le résultat numérique de référence, aussi bien dans le cas linéaire que dans le cas quadratique. Cependant on remarque que les niveaux de contraintes sont plus importants sur le modèle quadratique.

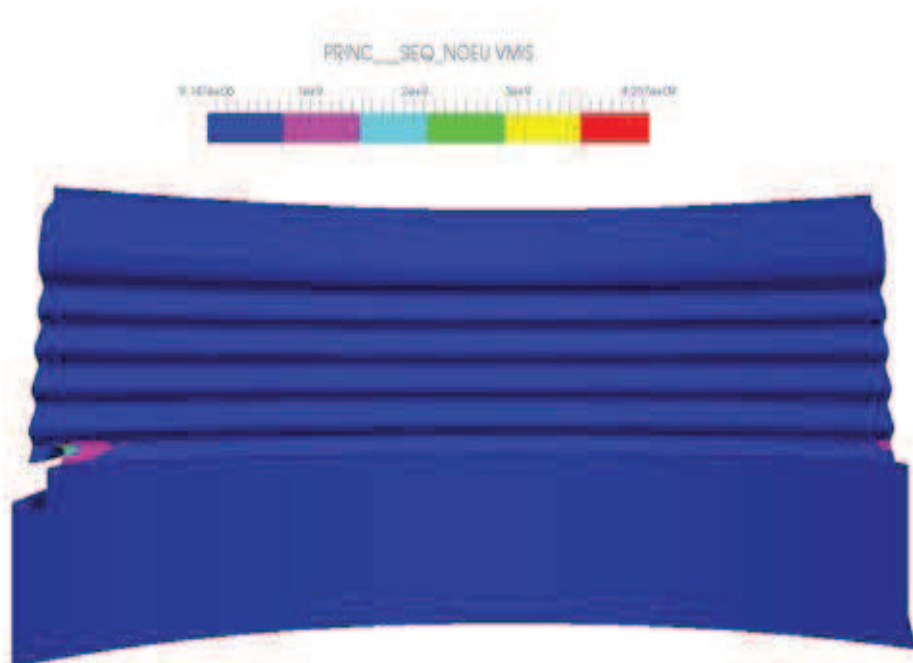


FIGURE 6.36 – Localisation du maximum des contraintes de Von Mises pour le maillage linéaire.

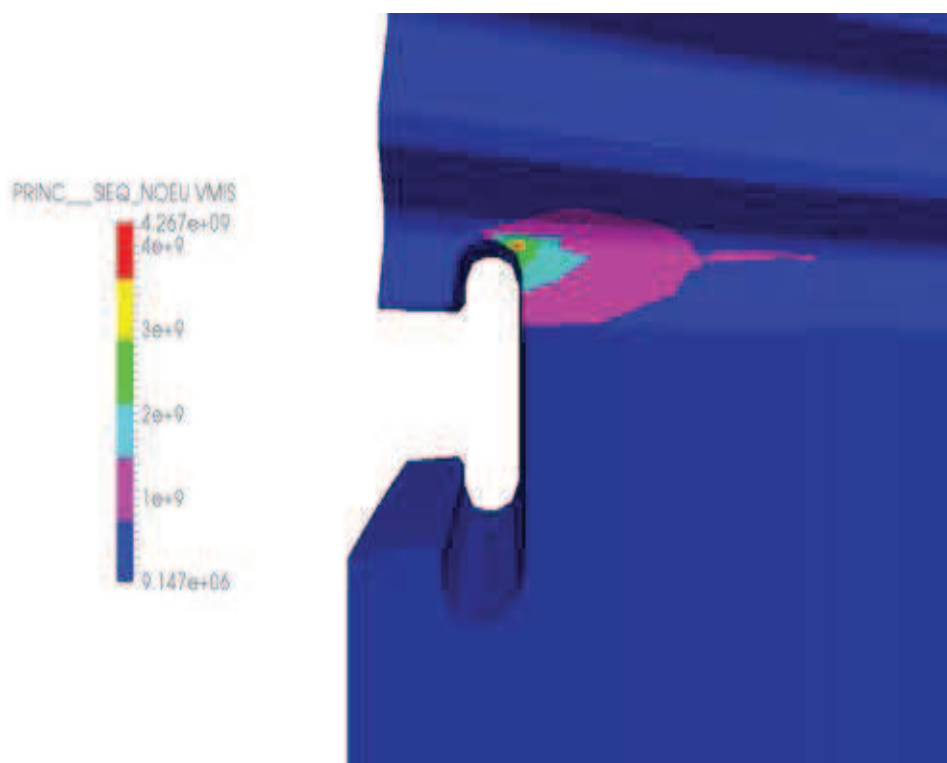


FIGURE 6.37 – Zoom sur l'intersection de la gorge de jonc d'arrêt et du cran inférieur côté extradoss, cas linéaire (lieu d'amorçage de fissures).

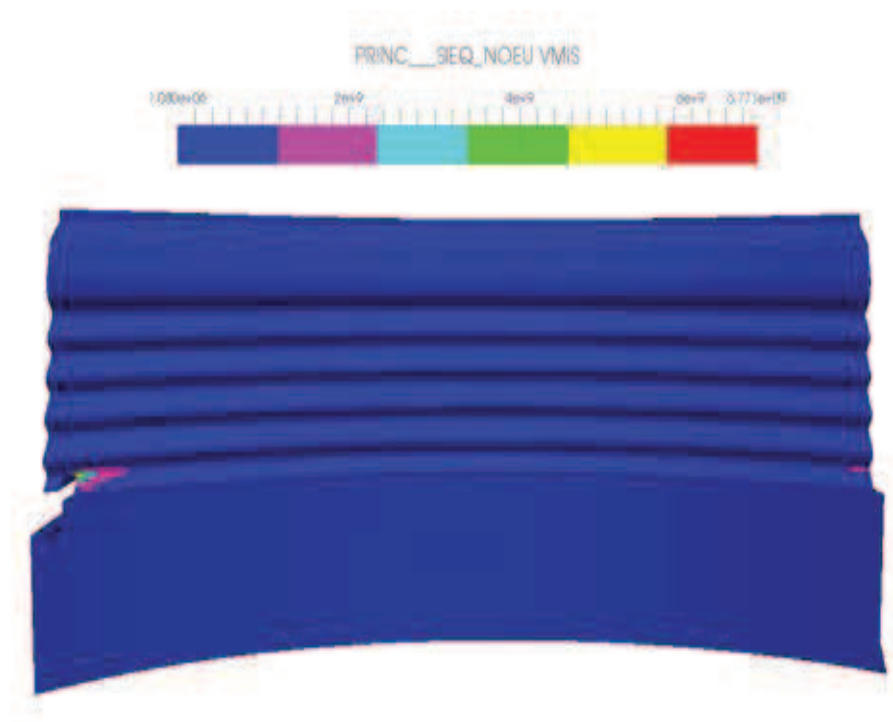


FIGURE 6.38 – Localisation du maximum des contraintes de Von Mises pour le maillage quadratique.

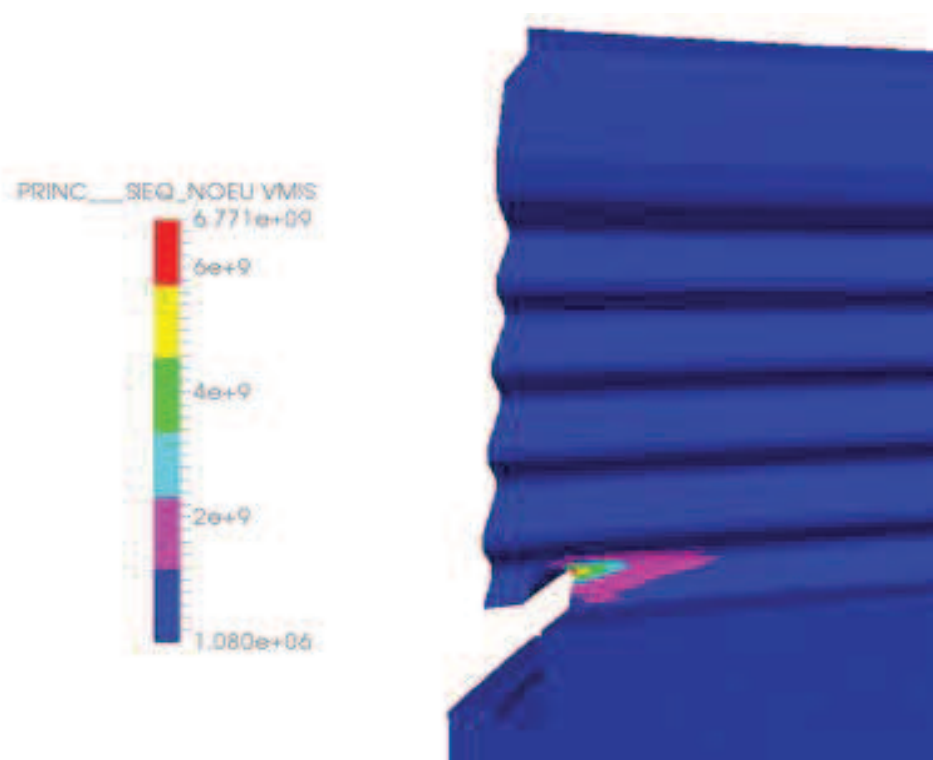


FIGURE 6.39 – Zoom sur l'intersection de la gorge de jonc d'arrêt et du cran inférieur côté extrados, cas quadratique (lieu d'amorçage de fissures).

Cran	Extrados	Intrados
SUP	149	139
MDS	173	160
MED	219	176
MDI	323	217
INF	2001	1033

TABLE 6.20 – Contraintes de Von Mises maximales en fond de cran (MPa) obtenues sur le maillage linéaire.

Cran	Extrados	Intrados
SUP	353	280
MDS	328	271
MED	471	284
MDI	700	305
INF	2521	560

TABLE 6.21 – Contraintes de Von Mises maximales en fond de cran (MPa) obtenues sur le maillage quadratique.

La répartition et les niveaux des contraintes de Von Mises sont globalement cohérents avec ceux observés sur le modèle numérique de référence. On observe bien que le cran inférieur subit le plus de contrainte et que ces contraintes sont décroissantes de bas en haut. Les valeurs obtenues sur le modèle quadratique correspondent très bien malgré une légère surcharge du cran supérieur. Le modèle linéaire présente quand à lui des niveaux de charge plus modérés et une surcharge importante de l'intrados au niveau du cran inférieur. On rappelle cependant que ce modèle possède moins de degrés de liberté par rapport au modèle de référence, ce qui peut expliquer les imprécisions quantitatives des résultats.

6.4.3 Synthèse

Les résultats obtenus sur cette étude sont très encourageants et motivent la poursuite de l'investigation sur cette méthode (notamment pour statuer sur les problèmes de détection dans le cas quadratique). Il nous a été possible de relâcher les contraintes de maillage tout en conservant une qualité de résultats globalement satisfaisante. De plus, on a réussi à obtenir des résultats de très bonne qualité sur un maillage quadratique. On entrevoit donc bien l'avantage de l'utilisation d'une approximation quadratique sur ce problème possédant une géométrie courbe.

6.5 Conclusion

Les résultats obtenus dans ce chapitre sont prometteurs. Malgré les quelques défauts observés, comme le manque de robustesse de l'approche quadratique en présence de grandes déformations, le temps de calcul de l'appariement pour des modèles possédant des zones

de contact étendues ou encore des problèmes de détection de contact inattendus, la méthode LAC se comporte très bien sur cette dernière batterie de cas tests. On obtient des pressions de contact de bonne qualité, notamment lors de l'utilisation de maillages quadratiques. La gestion de l'incompatibilité des maillages ne pose pas de problème particulier. Finalement, il a été possible de rejouer une étude industrielle en relâchant les contraintes de génération des maillages et d'obtenir des résultats sur un maillage quadratique. La méthode montre donc un bon potentiel pour répondre aux problématiques qui ont motivé son développement. Cependant, on note que cette première version nécessite encore du travail pour arriver à maturité, et pour pouvoir envisager une utilisation dans un contexte industriel de manière robuste et efficace.

Conclusion et perspectives

On a défini une méthode, la méthode LAC, répondant à la problématique de ce travail de thèse. À savoir, proposer une méthode locale facilement implémentable dans un code de calcul par éléments finis de niveau industriel et permettant de gérer le contact dans le cas des maillages incompatibles de manière “optimale”, à la fois théoriquement et numériquement.

Du point de vue théorique, la méthode proposée s’appuie sur un socle solide. On a démontré l’optimalité en termes de taux de convergence et la stabilité de la méthode dans le cas général des maillages incompatibles. Lors de l’analyse, on a introduit des nouveaux schémas de preuve innovants permettant de relâcher les hypothèses couramment utilisées pour démontrer l’optimalité des approches standard modélisant le problème de contact unilatéral.

Numériquement, la méthode a donné des résultats très positifs sur des cas tests “élémentaires”, notamment lors de l’utilisation de maillages quadratiques. On arrive à retrouver le bon comportement des méthodes de type “mortar”. Par exemple, le patch test de Taylor est vérifié à précision machine. Globalement, la qualité des résultats en pression de contact est grandement améliorée vis-à-vis des résultats obtenus par des approches de types nœud-segment ou nœud-facette, aussi bien qualitativement que quantitativement (il n’y a plus d’oscillation perceptible). On obtient donc des résultats comparables à ceux obtenus dans le cas particulier des maillages compatibles. Pour conclure la mise en œuvre numérique, on a confronté la méthode LAC à une modélisation de niveau industriel. Les premiers résultats obtenus sont très encourageants et démontrent le potentiel de la méthode pour répondre aux besoins de l’ingénierie en terme de robustesse vis-à-vis de l’incompatibilité des maillages.

La méthode proposée semble donc être un bon candidat pour introduire une méthode de type “mortar” dans le code de calcul par éléments finis considéré dans ce travail, **Code_Aster**. Elle remplit tous les prérequis nécessaires à une implémentation aisée et elle s’appuie sur un socle théorique rigoureux. De plus, la première analyse numérique motive la poursuite des travaux pour la rendre totalement opérationnelle.

En effet, bien que donnant déjà de très bons résultats, la première version de développement n’est pas encore totalement mature, principalement vis-à-vis du couplage avec d’autres non-linéarités telles que les grands déplacements et grandes déformations. Comme on a pu l’entrevoir lors de l’étude numérique des cas tests les plus complexes, les méthodes utilisées lors des opérations de projections (appariement, calcul élémentaire des matrices et du second membre) ne semblent pas être assez robustes pour traiter le problème des grandes déformations de manière satisfaisante. De plus, le coût de calcul engendré par l’opération d’appariement (la seule brique algorithmique non nativement parallèle) est encore trop discriminant, malgré l’utilisation d’un algorithme de recherche de complexité

linéaire. Par conséquent, on ne peut pas encore traiter de manière efficace des problèmes de grande dimension possédant des zones de contact potentiel de tailles importantes. On peut donc esquisser deux pistes d'évolution à court terme pour permettre de lever les derniers verrous et pouvoir envisager une industrialisation de la méthode :

- **Remettre en cause le choix de la projection normale pour l'appariement et le calcul du “jeu” :**

Il existe d'autres choix de projection possibles dans la littérature, comme les projections de types “ray-tracing” (voir [65]) ou “aircraft shadow” (voir [84]). Ces projections sont présentées comme étant plus stables et robustes. Une investigation dans ce sens paraît donc opportune. Un tel travail n'est pas trivial, il impose une réécriture partielle des opérations de projection intersection utilisées dans l'appariement et dans les calculs élémentaires. De plus, une telle modification d'approche impose un travail sur le choix des surfaces d'intégration et des normales prises en compte pour calculer les contributions matricielles.

- **Développer une version parallèle de l'opération d'appariement :**

Cet objectif est primordial pour pouvoir aborder des problèmes industriels de grande taille. Une première piste potentielle serait de développer un opérateur de tri intelligent permettant de répartir à chaque itération de l'algorithme de Newton les bons éléments sur les différents processeurs. En d'autres termes, il faut réaliser une partition de la zone de contact potentiel et ensuite regrouper ensemble les mailles de la surface maître pouvant s'apparier avec chaque sous-zone esclave. Il pourrait être envisagé d'utiliser une stratégie de boîtes englobantes, afin que chaque processeur puisse réaliser son calcul d'appariement, de manière indépendante, sur sa partition de taille restreinte en utilisant un algorithme de recherche de complexité linéaire. Une fois cette opération terminée chaque processeur disposerait des informations nécessaires pour réaliser les calculs élémentaires liés au contact.

Concernant les extensions théorique et numérique à moyen terme (de la méthode et des schémas de preuve), on peut citer deux points d'intérêts principaux :

- **Extension au frottement :**

Étant donné les besoins grandissants de l'ingénierie pour la modélisation précise et robuste du frottement, il serait licite d'étendre la démarche LAC vers ce problème en essayant de réutiliser la méthodologie de conditions en moyenne locale. De plus, l'extension des nouvelles méthodes de preuve introduites dans ce travail à ce problème pourrait apporter des résultats concluants.

- **Extension au contact-frottement en dynamique :**

Pour pouvoir aborder toutes les problématiques du problème de contact-frottement, le choix et l'analyse des schémas en temps pour les modélisations en dynamique est primordial. Un travail théorique est donc nécessaire pour justifier les approches numériques utilisées.

Bibliographie

- [1] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] J. Andersson. Optimal regularity for the Signorini problem and its free boundary. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 24 :371–386, 2013.
- [3] I. Athanasopoulos and L. A. Caffarelli. Optimal regularity of lower dimensional obstacle problems. *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 132(3) :274–284, 2006.
- [4] S. Auliac, Z. Belhachmi, F. Ben Belgacem, and F. Hecht. Quadratic finite elements with non-matching grids for the unilateral boundary contact. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 47(4) :1185–1205, 2013.
- [5] G. Bayada, M. Chambat, K. Lhalouani, and T. Sassi. Éléments finis avec joints pour des problèmes de contact avec frottement de Coulomb non local. (french) [on the mortar finite element method for contact problems with nonlocal Coulomb law]. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(12) :1323–1328, 1997.
- [6] F. Ben Belgacem and S. C. Brenner. Some nonstandard finite element estimates with applications to 3D Poisson and Signorini problems. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 12 :134–148, 2001.
- [7] Z. Belhachmi and F. Ben Belgacem. Quadratic finite element approximation of the signorini problem. *Mathematics of computation*, 72(241) :83–104, 2003.
- [8] F. Ben Belgacem. Numerical simulation of some variational inequalities arisen from unilateral contact problems by the finite element methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 37(4) :1198–1216, 2000.
- [9] F. Ben Belgacem, P. Hild, and P. Laborde. Approximation of the unilateral contact problem by the mortar finite element method. *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences Series I Mathematics*, 324(1) :123–127, 1997.
- [10] F. Ben Belgacem, P. Hild, and P. Laborde. Extension of the mortar finite element method to a variational inequality modeling unilateral contact. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 9(2) :287–303, 1999.
- [11] F. Ben Belgacem and Y. Renard. Hybrid finite element methods for the Signorini problem. *Mathematics of Computation*, 72(243) :1117–1145, 2003.
- [12] F. Ben Belgacem. A stabilized domain decomposition method with nonmatching grids for the stokes problem in three dimensions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(2) :667–685, 2004.
- [13] C. Bernardi and V. Girault. A local regularization operator for triangular and quadrilateral finite elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35 :1893–1916, 1998.
- [14] C. Bernardi, Y. Maday, and A. T. Patera. A new non conforming approach to domain decomposition : The mortar element method. In J-L. Lions H. Brezis, editor, *Collège de France Seminar*, pages 13–51. Pitman, 1994.

- [15] S. C. Brenner and R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15. Springer, 2008.
- [16] F. Brezzi and D. Marini. Error estimates for the three-field formulation with bubble stabilization. *Mathematics of Computation*, 70(235) :911–934, 2001.
- [17] E. Chamberlan and A. Fortin and. N. Tardieu. Solutions analytiques de problèmes de contact en grandes déformations. *Mécanique & Industries*, 11(3-4) :271–276, 2010.
- [18] Z. Chen and R. H. Nochetto. Residual type a posteriori error estimates for elliptic obstacle problems. *Numerische Mathematik*, 84(4) :527–548, 2000.
- [19] A. Chernov, M. Maischak, and E. P. Stephan. hp-mortar boundary element method for two-body contact problems with friction. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 31(17) :2029–2054, 2008.
- [20] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. Elsevier, 1978.
- [21] T. Cichosz and M. Bischoff. Consistent treatment of boundaries with mortar contact formulations using dual Lagrange multipliers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(9) :1317–1332, 2011.
- [22] F. Clement. Approximation by finite element functions using local regularization. *RAIRO Anal. Numer.*, 2 :77–84, 1975.
- [23] P. Coorevits, P. Hild, K. Lhalouani, and T. Sassi. Mixed finite element methods for unilateral problems : convergence analysis and numerical studies. *Mathematics of Computation*, 71(237) :1–25, 2002.
- [24] M. Crouzeix and V. Thomée. The stability in l^p and of $w^{1,p}$ the l^2 -projection onto finite element function spaces. *Mathematics of Computation*, 48(178) :521–532, 1987.
- [25] Electricité de France. Finite element *Code_Aster*, Analyses de Structures Thermo-Élastiques pour des Études et des Recherches. Open source on www.code-aster.org, 1989–2015.
- [26] Z. Dostál, D. Horák, and D. Stefanica. A scalable feti-dp algorithm with non-penetration mortar conditions on contact interface. *Journal of computational and applied mathematics*, 231(2) :577–591, 2009.
- [27] G. Drouet and P. Hild. Optimal convergence for discrete variational inequalities modelling Signorini contact in 2D and 3D without additional assumptions on the unknown contact set. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 53(3) :1488–1507, 2015.
- [28] A. Ern and J. L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*. Springer-Verlag New York, Inc., 2004.
- [29] R. S. Falk. Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities. *Mathematics of Computation*, 28(128) :963–971, 1974.
- [30] P. Farah, A Popp, and W. Wall. Segment-based vs. element-based integration for mortar methods in computational contact mechanics. *Comput. Mech.*, 55(1) :209–228, 2015.
- [31] G. Fichera. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno. *Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez. I*, 7(8) :91–140, 1963/1964.
- [32] KA. Fischer and P. Wriggers. Frictionless 2d contact formulations for finite deformations based on the mortar method. *Computational Mechanics*, 36(3) :226–244, 2005.

- [33] Kathrin A Fischer and Peter Wriggers. Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(37) :5020–5036, 2006.
- [34] M. J. Gander and C. Japhet. Algorithm 932 : Pang : software for nonmatching grid projections in 2d and 3d with linear complexity. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 40(1) :6, 2013.
- [35] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains, volume 24 of Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman. Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.
- [36] N. Guillen. Optimal regularity for the Signorini problem. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 36 :533–546, 2009.
- [37] S Hartmann, J Oliver, R Weyler, JC Cante, and JA Hernández. A contact domain method for large deformation frictional contact problems. part 2 : Numerical aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(33) :2607–2631, 2009.
- [38] S. Hartmann and E. Ramm. A mortar based contact formulation for non-linear dynamics using dual Lagrange multipliers. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44(5) :245–258, 2008.
- [39] J. Haslinger, I. Hlaváček, and J. Necas. *Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics*, volume 4 of *Handbook of Numerical Analysis*. North-Holland, Amsterdam, 1996.
- [40] P. Hauret and P. Le Tallec. A stabilized discontinuous mortar formulation for elastostatics and elastodynamics problems, Part 2 : discontinuous Lagrange multipliers. Technical report, CMAP, 2004.
- [41] P. Hauret and P. Le Tallec. A discontinuous stabilized mortar method for general 3D elastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(49) :4881–4900, 2007.
- [42] H. Hertz. Über die berührung fester elastischer körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92 :156–171, 1881.
- [43] S. Hilbert. A mollifier useful for approximations in sobolev spaces and some applications to approximating solutions to differential equations. *Math. Comp.*, 37 :81–89, 1973.
- [44] P. Hild. *Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, (www.math.univ-toulouse.fr/~phild/), 1998.
- [45] P. Hild. Numerical implementation of two nonconforming finite element methods for unilateral contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184(1) :99–123, 2000.
- [46] P. Hild and P. Laborde. Quadratic finite element methods for unilateral contact problems. *Applied Numerical Mathematics*, 41(3) :401–421, 2002.
- [47] P. Hild and Y. Renard. A stabilized Lagrange multiplier method for the finite element approximation of contact problems in elastostatics. *Numerische Mathematik*, 115(1) :101–129, 2010.
- [48] P. Hild and Y. Renard. An improved a priori error analysis for finite element approximations of signorini’s problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 50(5) :2400–2419, 2012.
- [49] S. Hübner and B. I. Wohlmuth. An optimal a priori error estimate for nonlinear multibody contact problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 43(1) :156–173, 2005.

- [50] S. Hübner and B. I. Wohlmuth. A primal-dual active set strategy for non-linear multibody contact problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194(27–29) :3147–3166, 2005.
- [51] N. Kikuchi and J. T. Oden. *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods*. SIAM, 1988.
- [52] A. Konter. Advanced finite element contact benchmarks. *NAFEMS*, 2006.
- [53] R. Krause. A nonsmooth multiscale method for solving frictional two-body contact problems in 2D and 3D with multigrid efficiency. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(2) :1399–1423, 2009.
- [54] R. H. Krause and B. I. Wohlmuth. Monotone multigrid methods on nonmatching grids for nonlinear multibody contact problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 25(1) :324–347, 2003.
- [55] A. D. Kudawoo. *Problèmes industriels de grande dimension en mécanique numérique du contact : performance, fiabilité et robustesse*. PhD thesis, Aix-Marseille, 2012.
- [56] T. A. Laursen. *Computational contact and impact mechanics : fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis*. Springer, 2002.
- [57] T. A. Laursen, M. A. Puso, and J. Sanders. Mortar contact formulations for deformable–deformable contact : past contributions and new extensions for enriched and embedded interface formulations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 205 :3–15, 2012.
- [58] H. Le Dret. *Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires*. Springer, 2013.
- [59] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, volume 1. Dunod, 1968.
- [60] M. Moussaoui and K. Khodja. Régularité des solutions d’un problème mêlé dirichlet–signorini dans un domaine polygonal plan. *Communications in partial differential equations*, 17(5-6) :805–826, 1992.
- [61] R. Nochetto and L. B. Wahlbin. Positivity preserving finite element approximation. *Math. Comp.*, 71 :1405–1419, 2002.
- [62] A. Popp, M. Gitterle, M. W. Gee, and W. Wall. A dual mortar approach for 3d finite deformation contact with consistent linearization. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 83 :1428–1465, 2010.
- [63] A. Popp, A. Seitz, M. W. Gee, and W. A. Wall. Improved robustness and consistency of 3d contact algorithms based on a dual mortar approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 264 :67–80, 2013.
- [64] A. Popp, B. I. Wohlmuth, M. W. Gee, and W. Wall. Dual quadratic mortar finite element methods for 3D finite deformation contact. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34(4) :B421–B446, 2012.
- [65] K. Poulis and Y. Renard. An unconstrained integral approximation of large sliding frictional contact between deformable solids. *Computers & Structures*, 153 :75–90, 2015.
- [66] M. A. Puso and T. A. Laursen. A mortar segment-to-segment frictional contact method for large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(45-47) :4891–4913, 2004.
- [67] M. A. Puso, T. A. Laursen, and J. Solberg. A segment-to-segment mortar contact method for quadratic elements and large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6) :555–566, 2008.

- [68] A. Rössle. Corner singularities and regularity of weak solutions for the two-dimensional lamé equations on domains with angular corners. *Journal of Elasticity*, 60 :57–75, 2000.
- [69] F. Scarpini and M. A. Vivaldi. Error estimates for the approximation of some unilateral problems. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 11(2) :197–208, 1977.
- [70] L.R. Scott and S. Zhang. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Math. Comp.*, 54 :483–493, 1990.
- [71] A. Signorini. Questioni di elastostatica linearizzata e semilinearizzata. *Rend. Math.*, 18 :381–402, 1959.
- [72] O. Steinbach, B. I. Wohlmuth, and L. Wunderlich. Trace and flux a priori error estimates in the finite element approximations of Signorini-type problems. ArXiv :1409.0563v1, september 2014.
- [73] G. Strang. Approximation in the finite element method. *Numer. Math.*, 19 :81–98, 1972.
- [74] R. L. Taylor and P. Papadopoulos. On a patch test for contact problems in two dimensions. *Computational methods in nonlinear mechanics*, pages 690–702, 1991.
- [75] I. Temizer. A mixed formulation of mortar-based frictionless contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 223 :173–185, 2012.
- [76] I. Temizer. A mixed formulation of mortarbased contact with friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255 :183–195, 2013.
- [77] I. Temizer, P. Wriggers, and T.J.R. Hughes. Three-dimensional mortarbased frictional contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 209/212 :115–128, 2012.
- [78] M. L. Torkhani. *Contribution au développement numérique d’éléments de contact et modélisation de l’usure des structures minces*. PhD thesis, Châtenay-Malabry, Ecole Centrale Paris, 2008.
- [79] H. Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North-Holland, 1978.
- [80] M. Tur, F. J. Fuenmayor, and P. Wriggers. A mortar-based frictional contact formulation for large deformations using Lagrange multipliers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(37) :2860–2873, 2009.
- [81] B. I. Wohlmuth. Variationally consistent discretization schemes and numerical algorithms for contact problems. *Acta Numerica*, 20 :569–734, 2011.
- [82] B. I. Wohlmuth, A. Popp, M. W. Gee, and W. Wall. An abstract framework for a priori estimates for contact problems in 3D with quadratic finite elements. *Computational Mechanics*, 49(6) :735–747, 2012.
- [83] P. Wriggers. *Computational contact mechanics*. Springer, 2006.
- [84] V. Yastrebov. *Mécanique numérique du contact : géométrie, détection et techniques de résolution*. PhD thesis, ENS des Mines de Paris, 2011.
- [85] C. Zammali. *Contribution à la modélisation mécanique et numérique des problèmes de contact-impact*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2005.
- [86] M. Zarroug. *Eléments mixtes de contact frottant en grandes transformations et applications*. PhD thesis, Châtenay-Malabry, Ecole Centrale Paris, 2002.
- [87] W. P. Ziemer. *Weakly differentiable functions*. Springer-Verlag New York, Inc., 1989.